

DFT'nin Çarpma İşlemi Kullanılmadan Yaklaşık Hesaplanması: Radar Sinyal İşleme Üzerine Uygulamalar

Approximate Computation of DFT without Performing any Multiplications: Application to Radar Signal Processing

Musa Tunç Arslan, Alican Bozkurt, Rasim Akin Sevimli, Cem Emre Akbaş, Ahmet Enis Çetin
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Bilkent Üniversitesi
{mtarslan, alican, sevimli, akbas}@ee.bilkent.edu.tr, cetin@bilkent.edu.tr

Özetçe —Radar sinyal işlemenin de dahil olduğu bir çok pratik problemde, ayrık Fourier Dönüşümünü (DFT) mükemmel biçimde hesaplamının gereği yoktur. Bu makalede, DFT'nin yaklaşık hesaplanmasını olanaklı kılan ve bunu çarpma kullanmadan yapan yeni bir algoritma sunulmuştur. Bütün $(a \times b)$ şeklindeki çarpma işlemleri, $sign(a \times b)(|a| + |b|)$ işlemi ile değiştirilmiştir. Bu yeni dönüşüm özellikle ilinti hesaplanmasının gerektiği sinyal işleme algoritmalarında kullanışlıdır. Radar sinyal işlemedeki belirsizlik fonksiyonu iki sinyal arasındaki ilintiyi hesaplamak için yüksek miktarda çarpma işlemine ihtiyaç duymaktadır. Bu yeni toplama işlemi, belirsizlik fonksiyonunun çarpma işlemi kullanılmadan yaklaşık hesaplanmasını mümkün kılmıştır. Pasif radarlarda uygulanmış birçok örnek simulasyon sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler—İlinti, pasif algılama sistemi, pasif radar, DFT, doğrusal olmayan DFT, saçılımlı DFT

Abstract—In many radar problems it is not necessary to compute the ambiguity function in a perfect manner. In this article a new multiplication free algorithm for approximate computation of the ambiguity function is introduced. All multiplications $(a \times b)$ in the ambiguity function are replaced by an operator which computes $sign(a \times b)(|a| + |b|)$. The new transform is especially useful when the signal processing algorithm requires correlations. Ambiguity function in radar signal processing requires high number of correlations and DFT computations. This new additive operator enables an approximate computation of the ambiguity function without requiring any multiplications. Simulation examples involving passive radars are presented.

Keywords—Correlation, passive radar, codifference, DFT, Non-linear DFT, scattering DFT.

I. GİRİŞ

[1], [2]'de, yaygın olarak kullanılan iç çarpım ve kovaryans işlemlerine hesapsal yönden verimli bir alternatif olarak yeni bir vektör çarpım işlemi tanımlanmıştır. Bu yeni vektör çarpım işlemi ve codifference işlemi, sıradan çarpma işlemi bir çeşit toplama işlemi ile değiştirmeye dayalıdır:

$$a \otimes b = sign(a \times b)(|a| + |b|), \quad (1)$$

denklemden,

$$sign(a \times b) = \begin{cases} 1, & \text{if } a > 0, b > 0 \text{ or } a < 0, b < 0, \\ -1, & \text{if } a < 0, b > 0 \text{ or } a > 0, b < 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2)$$

İki vektör $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^N$ 'ün vektör çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır,

$$\langle \mathbf{x} \odot \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^N x_i \otimes y_i, \quad (3)$$

denklemden, x_i ve y_i , sırasıyla \mathbf{x} ve \mathbf{y} vektörlerinin i 'inci elemanlarıdır. \mathbf{x} ve \mathbf{y} vektörlerinin ortalaması sıfıra eşit olduğunda da $\langle \mathbf{x} \odot \mathbf{y} \rangle$, \mathbf{x} ve \mathbf{y} vektörlerinin codifference'ı olur [2].

Denklem (1) ve (3)'e dayanarak, \mathbf{x} gibi bir vektörün $a \in R$ gibi bir sayıyla çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$a \odot \mathbf{x} = [a \odot x(1) \ a \odot x(2) \ \dots \ a \odot x(N)]^T, \quad (4)$$

denklemden, a herhangi bir gerçel sayıdır. Buradan yola çıkarak, \mathbf{x} gibi bir vektörün kendisi ile vektör çarpımı vektörün ölçeklenmiş l_1 normudur. Bu işlem aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\langle \mathbf{x} \odot \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^N x(i) \odot x(i) = 2 \sum_{i=1}^N |x(i)| = 2\|\mathbf{x}\|_1, \quad (5)$$

Bu makalede yukarıda tanımlanmış vektör çarpım kavramı, DFT'nin yaklaşık hesabı için kullanılmıştır. Bölüm 2'de, yeni bir doğrusal olmayan dönüşümle DFT'nin yaklaşık hesaplanması gösterilmiştir. Bölüm 3'te, doğrusal olmayan DFT'nin hızlı Fourier dönüşümü (FFT) versiyonu gösterilmiştir. Doğrusal olmayan FFT, [3]–[5]'te sunulmuş olan saçılımsal yaklaşım temel alınarak tasarlanmıştır. Bölüm 4'te, doğrusal olmayan DFT'nin, radar sinyal işleme problemleri üzerine uygulanması sunulmuştur. Deney sonuçları bölüm 5'te bulunmaktadır.

II. DFT'NİN DOĞRUSAL OLMAYAN DÖNÜŞÜMLE YAKLAŞIK HESAPLANMASI

[1], [2]'de, vektör çarpımlarında ve codifference işlemlerinde gerçel sinyaller ve resimler kullanılmıştır. Denklem (1)'de tanımlanmış yeni toplama işleminin karmaşık sayılara

genişletilmesi gerekmektedir. a ve b 'nin herhangi iki karmaşık sayı olduğunu varsayarsak, $a \otimes b$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} a \otimes b &\triangleq (a_r + ja_i) \otimes (b_r + jb_i) \\ &= a_r \otimes b_r - a_i \otimes b_i + j(a_i \otimes b_r + b_i \otimes a_r), \end{aligned} \quad (6)$$

denklemden, a ve b 'nin gerçel ve karmaşık kısımları sırasıyla, a_r, b_r ve a_i, b_i 'dir.

DFT işlemlerindeki matris-vektör çarpımını, Denklem (6)'da tanımlanmış işlem ile değiştirerek çarpımsız bir DFT dönüşümü elde etmek mümkündür. Bu yeni dönüşüm Doğrusal olmayan DFT olarak isimlendirilmiştir (NDFT). Denklem (6)'ya dayanarak, $x[n]$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$ gibi bir serinin NDFT'si aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W & \dots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & \dots & W^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W^{N-1} & \dots & W \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix} \quad (7)$$

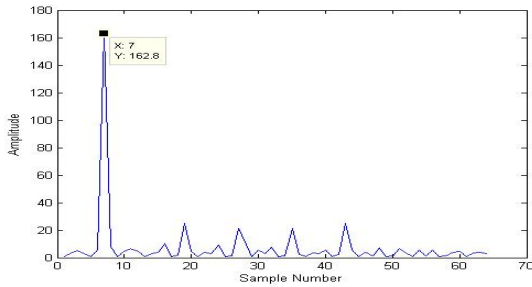
denklemden, $W = e^{-j2\pi/N}$, ve $X[0], \dots, X[N-1]$ NDFT katsayılarıdır.

$x[n] = e^{j2\pi k_0 n/N}$ gibi bir seride, NDFT aşağıdaki eşitsizlikten dolayı bir zirve noktası yapmaktadır:

$$\left| \langle x[n] \odot [1 \dots e^{-j2\pi k_0 n/N} \dots e^{-j2\pi k_0 (N-1)/N}] \rangle \right| \geq \left| \langle x[n] \odot [1 \dots e^{-j2\pi k n/N} \dots e^{-j2\pi k (N-1)/N}] \rangle \right|, \quad (8)$$

denklemden, $k \neq k_0$ 'dir.

$x[n] = e^{j2\pi 7n/N}$, $n = 0, \dots, N - 1$ için örnek bir NDFT hesaplaması, NDFT büyüklüğünün $N = 64$ olması halinde, Şekil 1'de verilmiştir. Şekil 1'de de görülebildiği üzere zirve noktası $k = 7$ 'dir, fakat diğer k değerlerine de bir miktar saçılmıştır. Bunun sebebi ise \odot işleminin doğrusal olmayan doğasından kaynaklanmaktadır.



Şekil 1: $x[n] = e^{j2\pi 7n/N}$, $n = 0, \dots, N - 1$, $N = 64$ 'nin doğrusal olmayan Fourier dönüşümü.

N -katsayılı NDFT'nin işlemsel yükü N^2 karmaşık \odot işlemi ve toplamadır. Her \odot işlemi 4 tane işaret hesaplanmasını, 8 tane gerçel mutlak değer hesaplanmasını ve 6 tane toplama işleminin hesaplanmasını gerektirir.

Denklem (7)'de tanımlanmış NDFT çarpımsız bir dönüşümdür fakat görece yavaştır. Başka bir doğrusal olmayan dönüşüm çeşidi, zamanda veya frekansta seyreltme

yöntemi kullanılan hızlı Fourier dönüşümünde (FFT), karmaşık çarpımlar yerine \odot kullanılarak tanımlanabilir. Bu yaklaşım [6], [7]'de kullanılan saçılım yöntemine benzerdir. Bölüm 3'te \odot işleminin FFT algoritması üzerine uygulaması verilmiştir.

III. FFT'NİN DOĞRUSAL OLMAYAN DÖNÜŞÜMLE YAKLAŞIK HESAPLANMASI

Bu bölümde doğrusal olmayan FFT tanımlanmıştır. Doğrusal olmayan FFT, saçılımsal dalgacık dönüşümünde olduğu gibi, doğrusal bir işlemi (çarpım), doğrusal olmayan bir işlemle değiştirerek yapılmaktadır [8]–[10].

Cooley-Tukey algoritması, DFT hesaplamada kullanılan en yaygın FFT algoritmasıdır. 2'li tabanda yapılan zamanda seyreltme algoritması, böl ve yönet tarzında bir yaklaşım ile N -katsayılı DFT'yi aşağıdaki gibi iki parçaya bölmektedir:

$$X_{DFT}[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n]W_N^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1]W_N^{2kn} \quad (9)$$

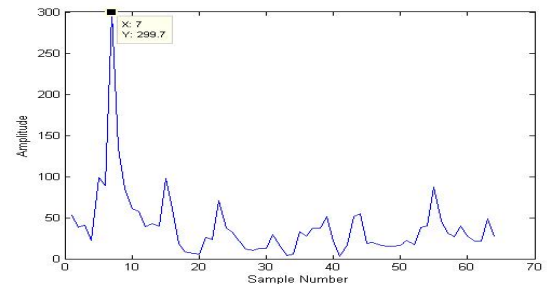
denklemden, $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ ve $W_N^{2kn} = e^{-j2\pi 2nk/N}$ 'dir.

İlk toplam $x[n]$ 'nin çift sayılı dizinli değerlerinin $N/2$ -katsayılı DFT'si ve ikinci toplam da $x[n]$ 'nin tek sayılı dizinli değerlerinin $N/2$ -katsayılı DFT'sidir. Bu iki $N/2$ -katsayılı DFT'ler daha sonra tekrar kendi içlerinde ayarlanarak $N/4$ -katsayılı DFT'lere indirgenmekte ve bu işlemler geriye sadece 2-katsayılı DFT'ler kalana kadar devam ettirilmektedir. Dolayısıyla, Fourier dönüşümü bir çok 2-katsayılı DFT kelebek yapıları kullanılarak hesap edilmektedir. Frekans seyreltme yöntemli FFT benzer bir uygulamaya dayanmaktadır.

FFT içerisindeki her DFT parçası, denklem (6)'da tanımlanmış toplama işlemi ile yapılabilir. Bu sayede çarpımsız doğrusal olmayan bir FFT (NFFT) aşağıdaki denkleme dayanır:

$$\hat{X}[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] \odot W_N^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] \odot W_N^{2kn} \quad (10)$$

denklemden, $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ ve $W_N^{2kn} = e^{-j2\pi 2nk/N}$ 'dir. $x[n] = e^{j2\pi 7n/N}$, $n = 0, \dots, N - 1$, ve NFFT büyüklüğü $N = 64$ için bir NFFT örneği Şekil 2'deki gibidir. N -katsayılı



Şekil 2: $\hat{X}[k]$, $k = 0, 1, \dots, N - 1$ 'nin NFFT'si $x[n] = e^{j2\pi 7n/N}$, $n = 0, \dots, N - 1$, $N = 64$.

NFFT'nin işlemsel yükü $N \log N$ karmaşık \odot işlemidir. Her \odot ,

4 işaret hesaplanması, 8 gerçel mutlak değer hesaplanması ve 6 toplama işlemine ihtiyaç duymaktadır.

⊙ işlemi doğrusal olmadığından dolayı $X_F[k]$, $k = 0, 1, \dots, N-1$ için NFFT değerleri, Denklem (7)'de elde edilen NDFT değerlerine eşit değildir.

IV. RADAR SİNYAL İŞLEME ÜZERİNE UYGULAMA

FFT yöntemi bir çok radar probleminde yaygın olarak kullanılmaktadır [11]. Bu bölümde, bölüm 2 ve 3'te sunulmuş NDFT ve NFFT'yi radar sinyal işleme üzerine uygulamaktayız.

Pratikte, verici tarafından yayılan sinyaller, çevredeki cisimlerden yansır ve yankı sinyallerini oluşturur. Hareketli cisimler, tespit edilmek istenen hedefler; hareketsiz cisimler de tespit edilmek istenmeyen yığınlardır. Hedef yankıları hem zamanda hem de frekansta kaymış sinyallerdir. Yığın yankılarında ise sadece zamanda kayma vardır.

Radar sinyal işleme problemlerinde hedef ve parazit yankı sinyallerini tespit etmeye yarayan belirsizlik fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$A[l, p] = \sum_{i=0}^{N-1} s_{surv}[i] s_{ref}^*[i-l] e^{-j2\pi ip/N} \quad (11)$$

denklemden, $A[l, p]$ uzaklık-Doppler yüzeyinin genişliği, l ilgilenilen uzaklık, p ilgilenilen Doppler, $s_{surv}[i]$ gözetleme almacı girdisi, $s_{ref}[i]$ kaynak almacı girdisidir. [12]

Bu denklemin gerçekleştirilmesi ise basitçe $i = 0, 1, \dots, N-1$ için $s_{surv}[i] \times s_{ref}^*[i-l]$ işleminin N-katsayılı DFT'sini hesaplamaktır. Radarlarda taban bant sinyalleri kullanıldığı için $s_{surv}[i]$ ve $s_{ref}[i]$, karmaşık değerli sinyallerdir. Bu yüzden Denklem (6)'da tanımlanmış toplama işlemi kullanılarak aşağıdaki gibi yeni belirsizlik fonksiyonları elde edilebilir:

$$\bar{A}[l, p] = \sum_{i=0}^{N-1} s_{surv}[i] \odot s_{ref}[i-l] \odot e^{-j2\pi ip/N} \quad (12a)$$

$$\hat{A}[l, p] = \sum_{i=0}^{N-1} (s_{surv}[i] \odot s_{ref}[i-l]) \times e^{-j2\pi ip/N} \quad (12b)$$

$$\text{ve, } \tilde{A}[l, p] = \sum_{i=0}^{N-1} (s_{surv}[i] \times s_{ref}[i-l]) \odot e^{-j2\pi ip/N} \quad (12c)$$

Bir sonraki bölümde (12a) ve (12b) kullanılarak elde edilmiş simülasyon deneylerini sunmaktayız. Denklem (12c) diğer denklemlere göre görece kalitesiz sonuçlar verdiği için $\tilde{A}[l, p]$ 'nin simülasyon verileri sunulmamıştır.

V. SİMULASYON SONUÇLARI

Bu bölümde hedef ve parazit sinyaller, Denklem (12a) ve (12b)'deki belirsizlik denklemleri kullanılarak tespit edilmiştir. Denklem (16) kullanılarak $s_{surv}(t)$ oluşturulmuş ve $s_{ref} = s(t)$ olduğu varsayılmıştır. Bu varsayım sonucunda hedef ve parazit sinyallerin gerçek uzaklıkları yerine bstatik uzaklıkları bulunabilmektedir. [12]'de de olduğu gibi s_{ref} 'in gürültülerden arınmış olduğu varsayılmıştır.

NFFT doğrusal olmayan bir işlem olduğundan dolayı girdi sinyallerinin değerleri tespit performansı açısından önemlidir. Tablo 1'de s_{surv} sinyali 64 ile, NFFT 16 ile çarpılarak değerleri yükseltilmiştir.

Genel olarak, FFT kullanılarak uygulanan belirsizlik fonksiyonu, Tablo 1 ve 2'den de görülebileceği üzere, doğrusal olmayan FFT'ye göre daha iyi yan kulak performansı sergilemiştir. Fakat, FFT tabanlı belirsizlik fonksiyonu doğrusal olmayan FFT'ye oranla, gürültünün kuyruk kısımları güçlü olduğunda tespit yapmayı başaramamıştır (epsilon kirlenmiş Gaussian gürültü). Bu beklenen bir durumdur çünkü ⊙ işlemi l_1 normunu uygular ve l_1 kullanan sistemler Öklit norm tabanlı ilinti sistemlerine göre daha dayanıklıdır [1], [2], [13], [14].

VI. SONUÇ

Bu bildiriye, DFT'yi yaklaşık olarak hesaplamak için, hesapsal yük açısından daha verimli, toplama işlemine dayalı yeni bir yöntem sunulmuştur. Bu yeni yöntemin en büyük üstünlüğü DFT'nin yaklaşık hesabını çarpma işlemi kullanmadan yapmasıdır. Doğrusal olmayan DFT, FFT algoritmasına benzeyen bir yöntemle de hesaplanabilmektedir. N-katsayılı FFT algoritmasının hesapsal yükü, $4 \times N \log N$ tane sign fonksiyonu hesabı, $8 \times N \log N$ tane gerçel mutlak değer hesabı ve $6 \times N \log N$ gerçel toplama işlemi hesabıdır.

Doğrusal olmayan DFT radar belirsizlik fonksiyonu kullanılarak başarılı bir şekilde hedef tespiti yapılmıştır. Gürültünün kuyruk kısımları güçlü olduğunda (epsilon kirlenmiş Gaussian gürültü) da FFT kullanılarak uygulanan belirsizlik fonksiyonuna göre üstün sonuçlar elde etmiştir.

Bu problemde dalgacık dönüşümü ya da Hadamard dönüşümü kullanmak, hareketli hedeflerin Doppler kaymalarından dolayı mümkün değildir.

Tablo I: Farklı ortam senaryoları ve gürültü modelleri için NFFT tabanlı belirsizlik fonksiyonunun simülasyon sonuçları.

Ortam	Performans	Gürültü	Yan kulak Tabanı (dB)
2 hedef 1 yığın	tespit edildi	3 dB	-3.86
2 hedef 1 yığın	tespit edildi	6 dB	-4.12
2 hedef 1 yığın	tespit edildi	eps. kir. $\epsilon = 0.9$ $\sigma_1 = 0.25$ $\sigma_2 = 10$	-2.24
2 hedef 1 yığın	tespit edildi	eps. kir. $\epsilon = 0.8$ $\sigma_1 = 0.25$ $\sigma_2 = 20$	-2.02
4 hedef 2 yığın	1 hedef maskelendi	3 dB	-3.34
4 hedef 2 yığın	tespit edildi	6 dB	-3.92
4 hedef 2 yığın	1 hedef 1 yığın maskelendi	eps. kir. $\epsilon = 0.9$ $\sigma_1 = 0.25$ $\sigma_2 = 10$	-2.99
4 hedef 2 yığın	2 yığın maskelendi	eps. kir. $\epsilon = 0.8$ $\sigma_1 = 0.25$ $\sigma_2 = 20$	-2.57
1 hedef 3 yığın	tespit edildi	3 dB	-4.01
1 hedef 3 yığın	tespit edildi	6 dB	-3.87
1 hedef 3 yığın	1 yığın maskelendi	eps. kir. $\epsilon = 0.9$ $\sigma_1 = 0.25$ $\sigma_2 = 10$	-2.53
1 hedef 3 yığın	1 yığın maskelendi	eps. kir. $\epsilon = 0.8$ $\sigma_1 = 0.25$ $\sigma_2 = 20$	-2.17

KAYNAKÇA

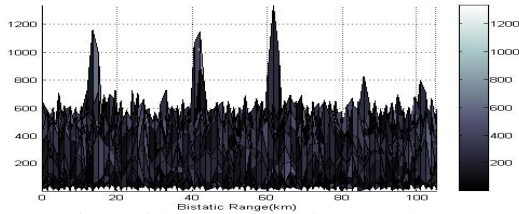
- [1] Hakan Tuna, Ibrahim Onaran, and A Enis Cetin, "Image description using a multiplier-less operator," IEEE Signal Processing Letters, vol. 16, no. 9, pp. 751-753, 2009.

Tablo II: Şekil 3, 4, 5 ve 6 için simülasyon ortamı. Epsilon kirlenmiş Gaussian gürültünün değerleri $\epsilon = 0.9$, $\sigma_1 = 0.25$ ve $\sigma_2 = 10$ şeklindedir.

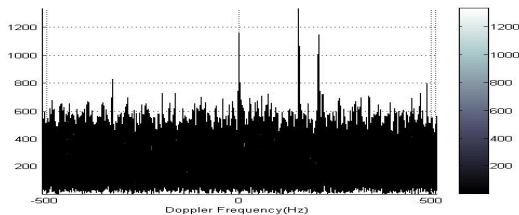
	x-ekseni (km)	y-ekseni (km)	Doppler Kayması (Hz)	K
verici	0	10	-	-
alıcı	0	0	-	-
hedef ₁	10	0	200	1
hedef ₂	20	0	157	1
yağın ₁	28	33	0	1

Tablo III: Farklı ortam senaryoları ve gürültü modelleri için FFT tabanlı belirsizlik fonksiyonunun simülasyon sonuçları.

Ortam	Performans	Gürültü	Yan kulak tabanı (dB)
2 hedef 1 yağın	tespit edildi	3 dB	-5.98
2 hedef 1 yağın	tespit edildi	6 dB	-6.13
2 hedef 1 yağın	tespit edilemedi	eps. kır. $\epsilon = 0.9$ $\sigma_1 = 0.25$ $\sigma_2 = 10$	-0.57
2 hedef 1 yağın	tespit edilemedi	eps. kır. $\epsilon = 0.8$ $\sigma_1 = 0.5$ $\sigma_2 = 20$	-0.39
4 hedef 2 yağın	1 hedef maskelendi	3 dB	-4.77
4 hedef 2 yağın	tespit edildi	6 dB	-6.02
4 hedef 2 yağın	tespit edilemedi	eps. kır. $\epsilon = 0.9$ $\sigma_1 = 0.25$ $\sigma_2 = 10$	-0.23
4 hedef 2 yağın	tespit edilemedi	eps. kır. $\epsilon = 0.8$ $\sigma_1 = 0.5$ $\sigma_2 = 20$	-0.12
1 hedef 3 yağın	tespit edildi	3 dB	-5.54
1 hedef 3 yağın	tespit edildi	6 dB	-5.73
1 hedef 3 yağın	tespit edilemedi	eps. kır. $\epsilon = 0.9$ $\sigma_1 = 0.25$ $\sigma_2 = 10$	-0.85
1 hedef 3 yağın	tespit edilemedi	eps. kır. $\epsilon = 0.8$ $\sigma_1 = 0.5$ $\sigma_2 = 20$	-0.33

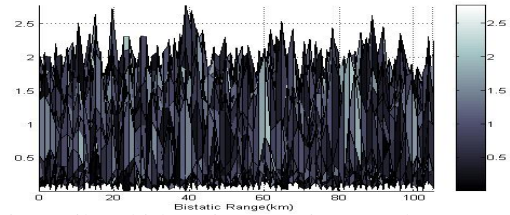


Şekil 3: Epsilon kirlenmiş Gaussian gürültüsü ve Denklem (12a)'daki NFFT için bistatik uzaklık grafiği.

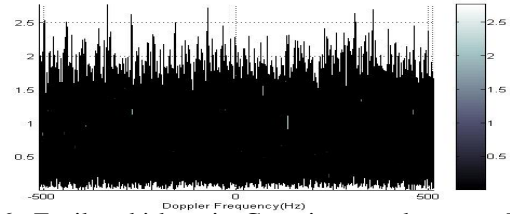


Şekil 4: Epsilon kirlenmiş Gaussian gürültüsü ve Denklem (12a)'daki NFFT için Doppler kayması grafiği.

- [2] Alexander Suhre, Furkan Keskin, Tülin Ersahin, Rengul Çetin Atalay, Rashid Ansari, A. Enis Çetin, "A multiplication-free framework for signal processing and applications in biomedical image analysis," IEEE ICASSP 2013, 2013.
- [3] Yann LeCun, Koray Kavukcuoglu, Clément Farabet, "Convolutional networks and applications in vision," in Proceedings of 2010 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS). IEEE, 2010, pp. 253–256.
- [4] Stéphane Mallat, "Group invariant scattering," Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 65, no. 10, pp. 1331–1398, 2012.



Şekil 5: Epsilon kirlenmiş Gaussian gürültüsü ve Denklem (11)'deki FFT için bistatik uzaklık grafiği.



Şekil 6: Epsilon kirlenmiş Gaussian gürültüsü ve Denklem (11)'deki FFT için Doppler kayması grafiği.

- [5] Fu Jie Huang, Yann LeCun, "Large-scale learning with svm and convolutional for generic object categorization," in 2006 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. IEEE, 2006, vol. 1, pp. 284–291.
- [6] Laurent Sifre, Stéphane Mallat, "Combined scattering for rotation invariant texture analysis," in European Symposium on Artificial Neural Networks, 2012.
- [7] Raia Hadsell, Sumit Chopra, Yann LeCun, "Dimensionality reduction by learning an invariant mapping," in 2006 IEEE computer society conference on Computer vision and pattern recognition. IEEE, 2006, vol. 2, pp. 1735–1742.
- [8] Joakim Andén, Stéphane Mallat, "Multiscale scattering for audio classification," in ISMIR, 2011, pp. 657–662.
- [9] Joan Bruna, Stéphane Mallat, "Invariant scattering convolution networks," arXiv preprint arXiv:1203.1513, 2012.
- [10] Y-L Boureau, Francis Bach, Yann LeCun, Jean Ponce, "Learning mid-level features for recognition," in 2010 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). IEEE, 2010, pp. 2559–2566.
- [11] Stephen D. Gedney, Raj Mittra, "The use of the fft for the efficient solution of the problem of electromagnetic scattering by a body of revolution," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 38, no. 3, pp. 313–322, 1990.
- [12] F Colone, DW O'hagan, P Lombardo, CJ Baker, "A multistage processing algorithm for disturbance removal and target detection in passive bistatic radar," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 45, no. 2, pp. 698–722, 2009.
- [13] Nojun Kwak, "Principal component analysis based on l1-norm maximization," IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 30, no. 9, pp. 1672–1680, 2008.
- [14] Qifa Ke, Takeo Kanade, "Robust l1 norm factorization in the presence of outliers and missing data by alternative convex programming," in IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2005. CVPR 2005. IEEE, 2005, vol. 1, pp. 739–746.