

Dışbükey Maliyet Fonksiyonlarının Epigraf Kümesine Dikey İzdüşüm Kullanan Ters Evrişim Algoritması

Deconvolution Using Projections Onto The Epigraph Set of a Convex Cost Function

Mohammad Tofghi*, Alican Bozkurt*, Kıvanç Köse†, A. Enis Çetin*

*Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü

Bilkent Üniversitesi, Ankara, Türkiye

{tofighi,alican}@ee.bilkent.edu.tr, cetin@bilkent.edu.tr,

†Dermatoloji Bölümü

Memorial Sloan Kettering Kanser Merkezi, New York, ABD

kosek@mskcc.org

Özetçe —Dışbükey maliyet fonksiyonunun epigraf kümesine dikey izdüşüme dayalı yeni bir ters evrişim algoritması sunulmuştur. Bu algoritmada önce enküçükleme probleminin boyutu bir arttırılır ve maliyet fonksiyonuna denk gelen kümeler tanımlanır. Eğer maliyet fonksiyonu N boyutlu gerçek uzayda dışbükeyse bu fonksiyona karşılık gelen epigraf kümesi de $N+1$ boyutlu gerçek uzayda dışbükeydir. Algoritma $N+1$ boyutlu uzayda herhangi bir ilk tahminle başlar. Algoritmanın her adımında önce gözlemleri temsil eden üstün düzlemlere ters evrişim izdüşümleri gerçekleştirilir, ardından maliyet fonksiyonunun epigraf kümesine dikey izdüşümler gerçekleştirilir. Sunulan algoritma toplam değişinti, l_1 , l_2 , and entropik maliyet fonksiyonları için bütünsel eniyi sonuçlara ulaşmaktadır.

Anahtar Kelimeler—*maliyet fonksiyonunun epigraf kümesi, ters evrişim, dışbükey kümelere dikey izdüşüm, toplam değişinti.*

Abstract—A new deconvolution algorithm based on making orthogonal projections onto the epigraph set of a convex cost function is presented. In this algorithm, the dimension of the minimization problem is lifted by one and sets corresponding to the cost function and observations are defined. If the utilized cost function is convex in R^N , the corresponding epigraph set is also convex in R^{N+1} . The deconvolution algorithm starts with an arbitrary initial estimate in R^{N+1} . At each iteration cycle of the algorithm, first deconvolution projections are performed onto the hyperplanes representing observations, then an orthogonal projection is performed onto epigraph of the cost function. The method provides globally optimal solutions for total variation, l_1 , l_2 , and entropic cost functions.

Keywords—*Epigraph of a cost function, deconvolution, projection onto convex sets, total variation.*

I. GİRİŞ

Dışbükey Maliyet Fonksiyonunun Epigraf Kümesine dikey İzdüşüm (DMFEKİ) yöntemine dayalı yeni bir ters evrişim algoritması sunulmuştur. Bregman'ın standart Dışbükey Kümeler Dikey İzdüşüm (POCS) yaklaşımında algoritma dışbükey kümelerin kesişimine yakınsamaktadır. Bu makalede de dışbükey maliyet fonksiyonları kullanılarak epigraf kümeleri ve POCS bazlı bir yapı kurulabileceği gösterilmiş ve bu yeni yapı ters evrişimde başarıyla kullanılmıştır.

Bregman aynı zamanda dışbükey eniyileme problemlerini çözmek için Bregman uzaklığına dayalı döngülü metotlar geliştirmiştir [1]. Bregman'ın yönteminde her adımda Bregman izdüşümü gerçekleştirmek gereklidir; ancak bu izdüşümü Bregman uzaklığı kullanarak hesaplamak kolay değildir [2].

POCS yaklaşımında amaç izdüşümler yaparak dışbükey kısıt kümelerinin kesişiminde bir vektör bulmaktır [3]–[16]. Eğer kümeler herhangi bir noktada kesişiyorlarsa izdüşümler bu kesişime yakınsar; eğer kesişmiyorlarsa kümeler arasında salınım yaparlar [17]. POCS yönteminde Bregman uzaklığı hesaplamak gerekli olmadığı için, bu yöntem birçok uygulamada kullanılmıştır. Bu makalede dikey izdüşümler dışbükey maliyet fonksiyonlarının epigraf kümelerine yapılarak dışbükey eniyileme problemlerinin çözümünde kullanılmıştır.

DMFEKİ yönteminde, sinyal geri çatma veya restorasyon probleminin boyutu bir arttırılır ve dışbükey maliyet fonksiyonuna karşılık gelen kısıt kümeleri tanımlanır. Bu yöntem Şekil 1'de gösterilmiştir. Bir maliyet fonksiyonu R^N uzayında dışbükeyse, bu fonksiyona karşılık gelen epigraf kümesi de R^{N+1} uzayında dışbükeydir. Bunun sonucu olarak, dışbükey enküçükleme problemi maliyet fonksiyonuna karşılık gelen epigraf kümesindeki $[\mathbf{w}^*, f(\mathbf{w}^*)]$ vektörünü bulmaya indirgenmektedir. Bu vektör Şekil 1'de gösterilmiştir. POCS'de olduğu gibi geliştirilen yeni algoritma R^{N+1} uzayında bir ilk tahminle başlar. Bu tahminin bir kısıt kümesine dikey izdüşümü alınır. Ardından yeni tahmin sonuc vektörünün epigraf kümesine izdüşümüyle elde edilir. Bu süreç döngü içinde tekrarlanır. Bu yöntem toplam değişinti(TD) [18], filtrelenmiş değişinti [4], l_1 [19], ve entropik maliyet fonksiyonları [4] gibi dışbükey fonksiyonlar için bütünsel eniyi sonuçlara ulaşmaktadır. Döngüsel süreç Şekil 1'de gösterilmiştir. Döngüler ilk tahmin \mathbf{w}_0 'den bağımsız olarak $[\mathbf{w}^*, f(\mathbf{w}^*)]$ çiftine yakınsamaktadır.

Makalenin düzeni şu şekildedir: Kısım II'de dışbükey maliyet fonksiyonunun epigrafı tanımlanmış ve DMFEKİ'ye dayalı dışbükey enküçükleme yöntemi tanıtılmıştır. Kısım III'de yeni ters evrişim algoritması sunulmuştur. Yeni algoritma diğer TD bazlı yöntemlerin [12], [18], [20] aksine herhangi bir düzenleme parametresine ihtiyaç duymamaktadır. Kısım IV'de benzetim sonuçları ve ters evrişim örnekleri sunulmuştur.

II. DIŞBÜKEY MASRAF FONKSİYONLARININ EPİGRAFLARI

Herhangi bir dışbükey enküçükleme problemini ele alalım

$$\min_{\mathbf{w} \in R^N} f(\mathbf{w}), \quad (1)$$

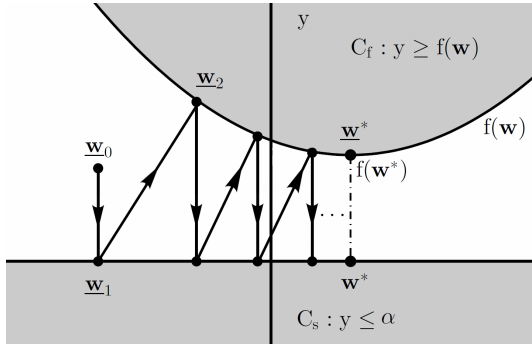
Burada $f: R^N \rightarrow R$ dışbükey bir maliyet fonksiyonudur. Bu $f(\mathbf{w})$ fonksiyonunun epigraf kümesi R^{N+1} uzayında (2) ile tanımlanır.

$$C_f = \{\underline{\mathbf{w}} = [\mathbf{w}^T \ y]^T : y \geq f(\mathbf{w})\}, \quad (2)$$

ki bu da $N + 1$ boyutlu uzayda, $(N + 1)$ inci elemanı $f(\mathbf{w})$ dan büyük $N + 1$ boyutlu vektörler kümesine karşılık gelmektedir. Makalede kalın harfler N boyutlu vektörler için, altı çizili kalın harfler de $N + 1$ boyutlu vektörler için kullanılmıştır. Maliyet fonksiyonu $f(\mathbf{w})$ ile alakalı ikinci küme de seviye kümesidir:

$$C_s = \{\underline{\mathbf{w}} = [\mathbf{w}^T \ y]^T : y \leq \alpha, \ \underline{\mathbf{w}} \in R^{N+1}\}, \quad (3)$$

Burada α bir gerçel sayıdır. Şekil 1de iki küme de R^{N+1} uzayında kapalı ve dışbükeydir. C_f ve C_s kümeleri Şekil 1'de resmedilmiştir.



Şekil 1: Maliyet fonksiyonu f_e bağlı C_f ve C_s dışbükey kümeleri. Sırayla başlangıç vektörü $\underline{\mathbf{w}}_0$ 'ın önce C_s kümesine sonra C_f kümesine izdüşümü alınarak bütünsel enküçük nokta olan $\underline{\mathbf{w}}^* = [\mathbf{w}^* \ f(\mathbf{w}^*)]^T$ a ulaşılır.

DMFEKİ yönteminin önemli bir parçası epigraf sete dikey izdüşümdür. $\underline{\mathbf{w}}_1$ R^{N+1} uzayında herhangi bir vektör olsun. İzdüşüm $\underline{\mathbf{w}}_2$ $\underline{\mathbf{w}}_1$ ve C_f arasındaki uzaklığı enküçükleyerek elde edilir:

$$\underline{\mathbf{w}}_2 = \arg \min_{\underline{\mathbf{w}} \in C_f} \|\underline{\mathbf{w}}_1 - \underline{\mathbf{w}}\|^2. \quad (4)$$

Denklem (4) bilinen $C_f \in R^{N+1}$ kümesine dikey izdüşüm işlemidir. Denklem (4)'ü çözmek için Bregman'ın D-izdüşümü veya Bregman izdüşümünü hesaplamak gerekli değildir. C_s kümesine izdüşüm apaçıktır: $N + 1$ boyutlu vektörün son elemanını sifra eşitlemek yeterlidir. DMFEKİ algoritmasında döngüler C_s ve C_f kümelerindeki birbirine en yakın vektörler arasında salınır. Bu olay Şekil 1'de görülebilir. Sonuç olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{\mathbf{w}}_{2n} = [\mathbf{w}^* \ f(\mathbf{w}^*)]^T, \quad (5)$$

elde edilir. Burada $\mathbf{w}^* \ f(\mathbf{w}^*)$ 'yu enküçükleyen N boyutlu vektördür.

Denklem (5)'nin ispatı Bregman'ın POCS teoreminden çıkarılabilir [21]. İspat Gubin tarafından kümelerin kesişmediği duruma genelleştirilmiştir [17]. C_s ve C_f kümeleri eniyi çözüm durumunda birbirine en yakın oldukları için döngüler n sonsuza giderken R^{N+1} uzayında $[\mathbf{w}^* \ f(\mathbf{w}^*)]^T$ ve $[\mathbf{w}^* \ 0]^T$ salınım yaparlar. Dikey olmayan izdüşümler yaparak yakınsama hızını arttırmak mümkündür [13].

Literatürdeki TD bazlı ters evrişim algoritmalarında [12], [22], [23] (6)daki maliyet fonksiyonu kullanılmıştır.

$$\min \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 + \lambda TV(\mathbf{w}), \quad (6)$$

Burada \mathbf{v} gözlemlenen sinyaldir. Bu problemin çözümü C_f ve C_s kümelerine ardışık dikey izdüşümler yapılan döngüsel bir metod kullanılarak elde edilebilir. Bu durumda maliyet fonksiyonu $f(\mathbf{w}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 + \lambda TV(\mathbf{w})$ olacaktır. Yani,

$$C_f = \{\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 + \lambda TV(\mathbf{w}) \leq y\}. \quad (7)$$

Elde edilen ters evrişim çözümleri Combettes'in elde ettiği sonuçlara [23], [24] yüksek derecede benzemektedir. TD bazlı maliyet fonksiyonlarının bir problemi düzenleme parametresi λ 'nın tahmin edilmesidir. λ genelde doğaçlama olarak veya deneme-yanılma yoluyla belirlenir. Gelecek kısımda λ parametresine gerek duymayan farklı bir TD bazlı maliyet fonksiyonu kullanan ters evrişim algoritması anlatılmaktadır.

III. DMFEKİ YÖNTEMİYLE TERS EVRİŞİM

Bu kısımda dışbükey maliyet fonksiyonunun epigraf kümesine bağlı yeni ters evrişim algoritması anlatılmaktadır. Maliyet fonksiyonu olarak TD, FD veya ℓ_1 normu kullanılabilir. \mathbf{w}_{orig} orjinal sinyal veya resim, \mathbf{z} de onun bulanık ve gürültülü hali olsun:

$$\mathbf{z} = \mathbf{w}_{orig} * \mathbf{h} + \boldsymbol{\eta}, \quad (8)$$

Burada \mathbf{h} bulanıklık matrisi ve $\boldsymbol{\eta}$ toplam Gauss gürültüsüdür. Bu yöntemde (9) gibi problemler çözülmektedir:

$$\underline{\mathbf{w}}^* = \arg \min_{\underline{\mathbf{w}} \in C_f} \|\underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{w}}\|^2, \quad (9)$$

burada, $\underline{\mathbf{v}} = [\mathbf{v}^T \ 0]$ ve C_f TD veya FD fonksiyonunun R^{N+1} uzayında epigraf kümesidir. $M \times M$ lik $\mathbf{w} = [w^{i,j}]$, $0 \leq i, j \leq M - 1 \in R^{M \times M}$ imgesinin TD fonksiyonu şu şekildedir:

$$TV(\mathbf{w}) = \sum_{i,j} (|w^{i+1,j} - w^{i,j}| + |w^{i,j+1} - w^{i,j}|). \quad (10)$$

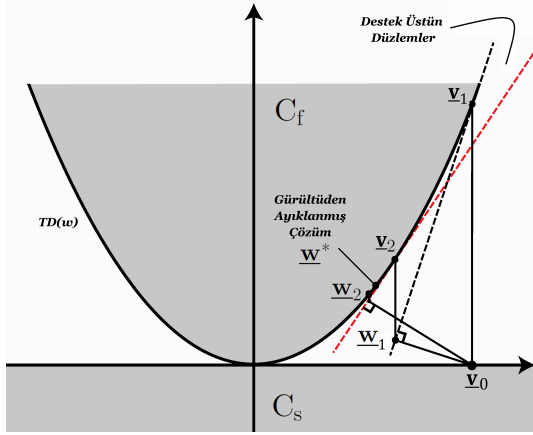
Problemin çözümünü kestirmek için DMFEKİ çerçevesi şu kümelerle uygulanır:

$$C_i = \{\mathbf{w} \in R^{N+1} | z_i = (\mathbf{w} * \mathbf{h})[i]\} \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad (11)$$

burada L piksel sayısı, z_i i . gözlem, ve

$$C_f = \{\underline{\mathbf{w}} \in R^{N+1} | \underline{\mathbf{w}} = [\mathbf{w}^T \ y]^T : y \geq TV(\mathbf{w})\}. \quad (12)$$

epigraf kümesidir. C_i kümesinin R^N uzayında; C_f kümesinin ise R^{N+1} uzayında olduğunu bir kez daha belirtelim. Buna rağmen, C_i kümesi kapalılık ve dışbükeylik özelliklerini kaybetmeden kolayca R^{N+1} uzayına genişletilebilir. $C_f = \{TV(\mathbf{w}) \leq y\}$ kümesine izdüşüm işlemi anlatalım. Dikkat edilmelidir ki bu C_f (7)dan farklıdır. Bu da demektir ki \mathbf{v} vektörüne C_f kümesindeki en yakın vektör $\underline{\mathbf{w}}^*$ seçilmektedir. Bu olay Şekil 2de gösterilmiştir. Bu izdüşümler sırasında



Şekil 2: Denklem (9)un C_f 'nin destek üstün düzlemlerine izdüşüm yapılarak enküçülenmesinin grafiksel gösterimi. Bu problemde C_s ve C_f kümeleri kesişmektedir çünkü $\mathbf{w} = [0, 0, \dots, 0]^T$ veya sabit bir vektör için $TD(\mathbf{w}) = 0$ 'dir.

diğer algoritmalarda [18] olduğu gibi herhangi bir parametre ayarlanmasına gerek duyulmamaktadır. POCS algoritması C_i ve C_f kümelerine dögüsel izdüşümlerden oluşmaktadır. Belirtilen kümeler üstün düzlem oldukları için bu kümelere izdüşüm yapmak kolaydır:

$$\mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{v}_r + \frac{z_i - (\mathbf{v}_r * \mathbf{h})[i] \mathbf{h}^T}{\|\mathbf{h}\|^2}, \quad (13)$$

burada v_r r . dögü, v_{r+1} de C_i üstün düzlemine izdüşüm vektörüdür. C_i ve C_f kümelerinin kesişimi boş küme olabilir. Eğer değilse, dögüler kesişim kümesindeki bir çözüme yakınsar. Algoritmada C_i üstün düzlemleri yerine $C_{i,h} = \{\mathbf{w} | z_i - \epsilon_i \leq (\mathbf{w} * \mathbf{h})[i] \leq z_i + \epsilon_i\}$ üstün levhası da kullanmak mümkündür. Bu durumda üstün levhaların kesişmesi ve algoritmanın bu kesişime yakınsaması daha olasıdır.

Gerçekleştirim: v_n 'in alt-gradyan izdüşümleri (13)deki gibi yapılmaktadır. Bu izdüşümlerin bir dögüsünden sonra DK-FEDİ algoritması dögünün sonucu v_n 'e uygulanır. Maliyet fonksiyonu TD olduğunda Denklem (9)da belirtilen izdüşüm işlemi tek adımda hesaplanamamaktadır. Bu durumda denklemin çözümüne epigraf kümesi C_f 'nin destek üstün düzlemlerilerine ardışık dikey izdüşümler sonucunda ulaşılır. İlk adımda $TD(\mathbf{v}_0)$ ve $\mathbf{v}_1 = [\mathbf{v}_0^T TD(\mathbf{v}_0)]$ noktasında yüzey dikmesi hesaplanır. Bu şekilde \mathbf{v}_1 noktasındaki destek üstün düzleminin denklemi elde edilmiş olur. Ardından $\mathbf{v}_0 = [\mathbf{v}_0^T 0]$ vektörünün bu üstün düzleme izdüşümü hesaplanır; ve Şekil 2de görüldüğü gibi ilk kestirim \mathbf{w}_1 bulunur. İkinci adımda \mathbf{w}_1 'nin son elemanı sıfırlanarak C_s kümesine izdüşümü alınmış olur. Bu vektörün TD'si, yüzey dikmesi ve destek üstün düzlemleri bir önceki adımdaki gibi hesaplanır. Ardından \mathbf{v}_0 'ın yeni destek üstün düzlemine izdüşümü alınır ve \mathbf{w}_2 elde edilir. Şekil 2'de \mathbf{w}_2 gürültüden arındırılmış çözüme \mathbf{w}^* noktasına çok yakındır. Genel olarak dögüler $\|\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_{i-1}\| \leq \epsilon$ koşulu sağlanana kadar devam etmektedir(burada ϵ önceden belirlenmiş bir sayıdır). Alternatif olarak dögüler belirli bir sayıdan sonra durabilir. Önceki paragrafta anlatılan algoritmanın her dögüsünün sonunda \mathbf{v}_0 ve \mathbf{w}_i arasındaki mesafe hesaplanır. $\|\mathbf{v}_0 - \mathbf{w}_i\|^2$ mesafesi büyük i değerleri için her zaman azalmamaktadır. Bu durum genelde eniyi

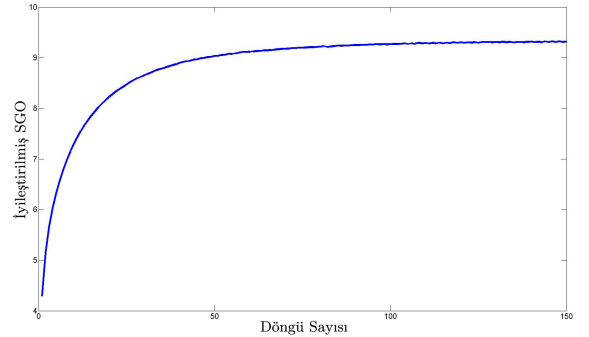
gürültüden arındırılmış çözümünün etrafında gerçekleşmektedir. $\|\mathbf{v}_0 - \mathbf{w}_i\|^2$ mesafesinde bir artış yakalandığında bir iyileştirme adımı uygulanarak son gürültüden arındırma probleminin mutlak çözümüne ulaşılır. Bu iyileştirme adımında $\frac{\mathbf{w}_i + \mathbf{w}_{i-1}}{2}$ noktasındaki destek üstün düzlemi yeni bir dögüde kullanılır. \mathbf{v} vektörünü C_f kümesinin sınırı yerine içine izdüşümünü olarak \mathbf{w}^* 'in daha pürüzsüz versiyonuna ulaşmak mümkündür.

IV. SİMÜLASYON SONUÇLARI

Bu bölümde DMFEKİ algoritması standart resimler üzerinde test edilmiştir. Resimler 9×9 düzgün filtreden geçirildikten sonra bulanıklaştırılmış sinyal gürültü oranı (BSGO = $10 \times \log_{10}(\frac{\|\tilde{\mathbf{z}} - E[\tilde{\mathbf{z}}]\|^2}{N\sigma_\eta^2})$) istenen seviyeye gelecek şekilde standart sapması ayarlanmış Gauss gürültüsü eklenmiştir. Burada $\tilde{\mathbf{z}}$ gürültüsüz bulanık resim $\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{w}_{orig} * \mathbf{h}$, N piksel sayısı, ve σ eklenen Gauss gürültüsünün standart sapmasıdır. Görsel sonuçların yanında, ters evrişim algoritması diğer algoritmalarla iyileştirilmiş sinyal gürültü oranı (İSGO) üzerinden karşılaştırılmıştır.

$$\text{İSGO} = 10 \times \log_{10}\left(\frac{\|\mathbf{z} - \mathbf{w}_{orig}\|^2}{\|\mathbf{w}_{rec} - \mathbf{w}_{orig}\|^2}\right), \quad (14)$$

burada \mathbf{w}_{rec} ters evriştirilmiş resimdir. MRI resmi için İSGO'nun dögü sayısına bağlı değişimi Şekil 3de gösterilmiştir. Tablo I ve IIde beş farklı BSGO değeri için DMFEKİ ve



Şekil 3: İSGO'nun dögü sayısına bağlı değişimi.

FTL([25]) algoritmalarının İSGO ve SGO değerleri verilmiştir. Sonuçlarda görüldüğü gibi hemen her resim ve BSGO değerinde DMFEKİ algoritması FTL algoritmasından daha iyi performans sergilemektedir. Şekil 4de örnek orjinal, bulanıklaştırılmış, ve ters evriştirilmiş resimler verilmiştir. Şekilde görüldüğü gibi DMFEKİ algoritması rakibinden sadece SGO olarak değil, görsel olarak da üstün sonuçlar vermektedir.

V. SONUÇ

TD fonksiyonunun epigraf kümesine izdüşüm yöntemine dayalı yeni bir ters evrişim algoritması geliştirilmiştir. Diğer dışbükey maliyet fonksiyonlarının da epigraf kümeleri bu yeni yöntemde kullanılabilir. Ters evriştirilmiş sinyal gözlemlere karşılık gelen üstün düzlem ve maliyet fonksiyonunun epigraf kümesine yapılan izdüşümler sonucu elde edilmektedir. Diğer TD ters evrişim algoritmalarının aksine bu algoritmada

BSNR	Cameraman		Lena		Peppers	
30	5.59	20.83	4.48	24.94	5.35	26.13
35	7.01	22.28	5.77	26.26	5.88	26.72
40	8.49	23.77	6.95	27.46	7.45	28.32
45	9.75	25.04	8.03	28.55	8.52	29.39
50	10.76	26.10	8.49	29.00	9.50	30.37
BSNR	Pirate		Mandrill		MRI	
30	4.57	22.77	4.56	20.77	4.64	13.71
35	5.55	23.28	5.61	21.83	5.76	14.90
40	6.75	24.99	6.41	22.65	7.07	16.28
45	7.87	26.12	6.72	22.95	8.40	17.61
50	8.41	26.66	6.84	23.07	9.31	18.53

Tablo I: DMFEKİ algoritması için İSGO ve SGO değerleri. FTL algoritmasından daha iyi sonuçlar kalın olarak belirtilmiştir.

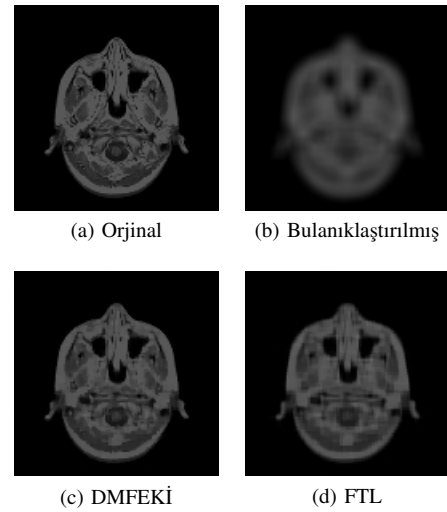
BSNR	Cameraman		Lena		Peppers	
30	-0.40	14.79	-0.74	19.70	-3.26	17.20
35	6.16	21.35	5.46	25.97	5.66	26.11
40	7.54	22.73	6.60	27.13	8.00	28.45
45	7.89	23.08	6.93	27.46	8.14	29.02
50	8.04	23.23	7.07	27.59	8.74	29.20
BSNR	Pirate		Mandrill		MRI	
30	0.71	18.74	4.32	20.52	4.08	13.02
35	5.61	23.68	5.45	21.65	5.03	14.36
40	6.44	24.50	5.74	21.94	5.45	14.73
45	6.67	24.75	5.89	22.08	5.56	14.86
50	6.77	24.84	5.98	22.18	5.61	14.92

Tablo II: FTL algoritması için İSGO ve SGO değerleri.

herhangi bir parametrenin ayarlanmasına gerek olmamaktadır. Deneysel sonuçlar göstermektedir ki çok sayıda örnek resim için DMFEKİ algoritması hem görsel olarak hem SGO olarak standart TV bazlı ters evrişim algoritmalarından daha iyi performans sergilemektedir.

KAYNAKÇA

- [1] L. Bregman, "The Relaxation Method of Finding the Common Point of Convex Sets and Its Application to the Solution of Problems in Convex Programming," *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 7, pp. 200 – 217, 1967.
- [2] W. Yin, S. Osher, D. Goldfarb, and J. Darbon, "Bregman iterative algorithms for ℓ_1 -minimization with applications to compressed sensing," *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 1, no. 1, pp. 143–168, 2008.
- [3] A. E. Cetin, A. Bozkurt, O. Gunay, Y. H. Habiboglu, K. Kose, I. Onaran, R. A. Sevimli, and M. Tofighi, "Projections onto convex sets (pocs) based optimization by lifting," *IEEE GlobalSIP 2013, Austin, Texas, USA*, 2013.
- [4] K. Kose, O. Gunay, and A. E. Cetin, "Compressive sensing using the modified entropy functional," *Digital Signal Processing*, 2013.
- [5] D. Youla and H. Webb, "Image Restoration by the Method of Convex Projections: Part I Num2014;theory," *IEEE Trans. on Medical Imaging*, vol. 1, pp. 81–94, 1982.
- [6] Y. Censor, W. Chen, P. L. Combettes, R. Davidi, and G. T. Herman, "On the Effectiveness of Projection Methods for Convex Feasibility Problems with Linear Inequality Constraints," *Computational Optimization and Applications*, vol. 51, pp. 1065–1088, 2012.
- [7] A. E. Cetin, "Reconstruction of signals from fourier transform samples," *Signal Processing*, pp. 129–148, 1989.
- [8] K. Kose and A. E. Cetin, "Low-pass filtering of irregularly sampled signals using a set theoretic framework," *IEEE Signal Proc. Mag.*, pp. 117–121, 2011.
- [9] K. S. Theodoridis and I. Yamada, "Adaptive learning in a world of projections," *IEEE Signal Proc. Mag.*, vol. 28, no. 1, pp. 97–123, 2011.
- [10] Y. Censor and A. Lent, "Optimization of logx entropy over linear equality constraints," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 25, no. 4, pp. 921–933, 1987.



Şekil 4: Deneylerde kullanılan örnek resimler: (a) Orjinal, (b) Bulanıklaştırılmış, (c) Ters evriştirilmiş (DMFEKİ), (d) Ters evriştirilmiş (FTL).

- [11] H. J. Trussell and M. R. Civanlar, "The Landweber Iteration and Projection Onto Convex Set," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 33, no. 6, pp. 1632–1634, 1985.
- [12] P. L. Combettes and J.-C. Pesquet, "Image restoration subject to a total variation constraint," *IEEE Trans. on Image Proc.*, vol. 13, pp. 1213–1222, 2004.
- [13] P. L. Combettes, "The foundations of set theoretic estimation," *Proc. of the IEEE*, vol. 81, pp. 182 –208, 1993.
- [14] Y. Censor and G. T. Herman, "On some optimization techniques in image reconstruction from projections," *Applied Numerical Mathematics*, vol. 3, no. 5, pp. 365–391, 1987.
- [15] I. Sezan and H. Stark, "Image restoration by the method of convex projections: Part 2-applications and numerical results," *IEEE Trans. on Medical Imaging*, vol. 1, pp. 95–101, 1982.
- [16] A. Lent and H. Tuy, "An Iterative Method for the Extrapolation of Band-Limited Functions," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 83, pp. 554–565, 1981.
- [17] L. Gubin, B. Polyak, and E. Raik, "The Method of Projections for Finding the Common Point of Convex Sets," *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 7, pp. 1 – 24, 1967.
- [18] A. Chambolle, "An algorithm for total variation minimization and applications," *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 20, no. 1-2, pp. 89–97, Jan. 2004.
- [19] R. Baraniuk, "Compressive sensing [lecture notes]," *IEEE Signal Proc. Mag.*, vol. 24, pp. 118–121, 2007.
- [20] S. Ono, M. Yamagishi, and I. Yamada, "A sparse system identification by using adaptively-weighted total variation via a primal-dual splitting approach," *Proc. of IEEE ICASSP2013*, 2013.
- [21] L. Bregman, "Finding the common point of convex sets by the method of successive projection.(russian)," *{USSR} Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 7, no. 3, pp. 200 – 217, 1965.
- [22] P. L. Combettes and J.-C. Pesquet, "Proximal splitting methods in signal processing," in *Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering*. Springer, 2011, pp. 185–212.
- [23] P. Combettes and J. Pesquet, "Image deconvolution with total variation bounds," in *Signal Processing and Its Applications, 2003. Proc.. Seventh International Symposium on*, vol. 1, July 2003, pp. 441–444 vol.1.
- [24] G. Chierchia, N. Pustelnik, J.-C. Pesquet, and B. Pesquet-Popescu, "Epigraphical projection and proximal tools for solving constrained convex optimization problems: Part i," *CoRR*, vol. abs/1210.5844, 2012.
- [25] C. Vonesch and M. Unser, "A fast thresholded landweber algorithm for wavelet-regularized multidimensional deconvolution," *Image Processing, IEEE Transactions on*, vol. 17, no. 4, pp. 539–549, 2008.