

Kesirli Fourier Dönüşümünün Zaman Bölgesinde Sonlu Farklar Yöntemine Uygulanması

Application of Fractional Fourier Transform to Finite Difference Time Domain Method

İşıltan Sayın¹, Feza Arıkan¹, Orhan Arıkan²

1. Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Hacettepe Üniversitesi
{isiltan, arikan}@hacettepe.edu.tr

2. Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Bilkent Üniversitesi
oarikan@bilkent.edu.tr

Özetçe

Bilgisayarların hız ve belleklerinin gelişmesi ile birlikte elektromanyetik problemlerin çözümünde sayısal yöntemler sıkça kullanılmaya başlanmış ve bu konuda çok sayıda araştırma yapılmıştır. Sayısal Elektromanyetik yöntemleri genel olarak zaman ve frekans tabanlı yöntemler olarak sınıflandırılabilir. Zaman tabanlı yöntemler geçici tepkilerin ve geniş bantlı problemlerin incelenmesinde kullanışlı olurken, frekans tabanlı yöntemler durağan hal tepkilerin ve dar bantlı problemlerin incelenmesinde en iyi çözümü vermektedir. Her iki yaklaşımın da avantajlarını ön plana çıkarabilecek bir yöntem geliştirilebileceği düşünülmektedir. Uzayda ve/veya zamanda Kesirli Fourier Dönüşümü uygulanarak bazı durumlarda hesaplama karmaşıklığı azaltılabilir. Kesirli Fourier Dönüşümü, sürekli Fourier Dönüşümünün genelleştirilmiş halidir. Son yıllarda bu konu üzerinde çeşitli çalışmalar yapılmakta ve uygulama alanları genişlemektedir. Genel olarak, sinyal işleme ve gürültü süzme gibi alanlarda kullanılmaktadır. Bu çalışmada Kesirli Fourier Dönüşümü, ilk kez Maxwell denklemlerine zaman bölgesinde uygulanmış ve elde edilen diferansiyel denklemler sonlu farklar yaklaşımı ile ayrık hale getirilmiştir. Elde edilen ayrık sonlu fark denklemlerinin çözümü için öneriler sunulmuştur.

Abstract

With the improvement in the computer speed and memory, Numerical Methods are frequently used in the solution of electromagnetic problems. Numerical Methods can be classified as the frequency domain and the time domain based methods. While the time domain methods are suitable for modeling of the transient response and wideband problems, the frequency domain methods are suitable for modeling of the steady state response and narrow band problems. A numerical method that has the advantages of both time and frequency domain approaches can be developed. Applying Fractional Fourier Transform in space and/or time can reduce the computational complexity for some cases. The Fractional Fourier Transform is a generalization of the continuous

Fourier Transform. In last decades, there are several studies and applications concerning this transform. Generally, it is used in signal processing and noise filtering. In this study, Fractional Fourier Transform is applied to the Maxwell's Equations for the first time in literature. Finite difference equations are obtained by the application of finite difference approximation to the differential equations.

1. Giriş

Elektromanyetik alan teorisi, duran veya hareketli yükler ve bu yüklerin oluşturduğu elektrik ve manyetik alanlarla ilgilenen bir bilim dalıdır. Bu yüzden günümüzde kullanılan her türlü elektronik sistemin tasarım ve analizinde gerekli olan temel konulardan birisidir. Elektromanyetik teori, anten tasarımı ve analizi, radar kesit alanı hesaplanması, elektromanyetik uyumluluk ve girişim, haberleşme sistemleri, uzaktan algılama, optik gibi çok çeşitli konularda uygulama alanı bulmuştur. Bu konularda karşılaşılan problemlerin çözümünde elektromanyetik yöntemler kullanılmaktadır.

Elektromanyetik yöntemler analitik ve sayısal olarak sınıflandırılabilir. Analitik yöntemler, problemin tam çözümünü vermekte ancak pratikte sadece belli geometrik yapılarla uygulanabilmektedir. Bilgisayarların hız ve bellek kapasitelerinin artmasıyla elektromanyetikteki problemlerin sayısal yöntemlerle çözümü ağırlık kazanmıştır. Genel olarak sayısal elektromanyetik yöntemleri integral denklemi (İD) veya diferansiyel denklem (DD) çözen yöntemler olarak sınıflandırılabilir. Bu sınıflandırmadan ayrı olarak, sayısal elektromanyetik yöntemler, zaman bölgesi (ZB) ve frekans bölgesi (FB) tabanlı yöntemler olarak da gruplandırılabilir [1-2]. İD-FB tabanlı yöntemlere örnek olarak, momentler ve hızlı çokkutup yöntemleri, DD-ZB tabanlı yöntemlere Zaman Bölgesinde Sonlu Farklar (ZBSF), DD-FB tabanlı yöntemlere ise Sonlu Elemanlar Yöntemi verilebilir. İD ve DD-FB tabanlı yöntemlerde, doğrusal denklem sistemi oluşturularak bilinmeyenler matris denklemi çözülerek bulunur. Bunlara ek olarak DD-ZB tabanlı yöntemlerde de kapalı ve açık olmak üzere iki çeşit çözüm bulunabilir. DD-ZB açık çözümlerde doğrusal denklem sistemleri yerine Maxwell

denklemlerindeki diferansiyel denklemler yinelemeli bir şekilde çözülür ve bu nedenle bu tip yöntemler bilgisayar kaynaklarına daha az ihtiyaç duyarlar. Ancak çözümün sayısal olarak kararlı olabilmesi için zaman ve uzay adımlarının kararlılık koşullarını sağlaması gerekir. DD-ZB tabanlı kapalı çözümlerin elde edilmesinde de matris denklemi çözülür. Açık çözüm yaklaşımına göre bu yöntemin avantajı, çözümün daima kararlı olmasıdır [2-3]. Problem boyutları büyüdükçe yöntemlerin bilgisayar kaynaklarına olan ihtiyacı da artmaktadır.

FB tabanlı yöntemler problemi tek bir frekansta çözdükleri için geniş bantlı kaynak bulunan problemlere uygulandıkları zaman her bir frekans için problem tekrar çözülmesi gerekmekte ve hesaplama karmaşıklığı artmaktadır. ZB tabanlı yöntemler ise geniş bantlı kaynakların bulunduğu problemleri tek bir benzetimle çözebilmektedir. Ancak bu yöntemlerde de her bir kaynak için benzetim tekrarlanmalıdır [1; 4]. Doğrusal ve özdeş olmayan, yöne ve zamana bağımlı ortamlar içeren problemler ZB tabanlı yöntemlerle daha kolay çözülebilirler.

Işınım, yayılım ve saçılım problemlerinde haberleşme ve radar uygulamalarında kullanılan pekçok geniş bantlı ve uzun süreli darbeleri sinyaller için ZB ve FB yaklaşımları yeterli olmamaktadır. Her iki yaklaşımın avantajlarını öne çıkaracak yöntemler geliştirilebilir. Bu durumda Maxwell Denklemleri, frekans bölgesi veya zaman bölgesi yerine, Kesirli Fourier bölgesinde çözülerek her iki yaklaşımın da avantajlarının korunabileceği düşünülmektedir. Bazı durumlarda örneğin 'chirp' darbe sinyallerinin kullanıldığı radar problemlerindeki gibi kaynaktan üretilen sinyalin zaman-frekans gösteriminde, sinyalin dayanağının belli bölgelerde yoğunlaştığı durumlar için, kesirli Fourier bölgesinde uygulanacak çözüm teknikleri fayda sağlayabilir.

Bu çalışmada Kesirli Fourier Dönüşümünün (KFD), Maxwell Denklemlerine ve ZBSF yöntemine uygulanabileceği önerilmektedir. Uygulamada karşılaşılan problemler anlatılmış ve çözüm önerileri verilmiştir. İkinci ve üçüncü bölümlerde, sırasıyla, KFD ve ZBSF yöntemi anlatılmıştır. Dördüncü bölümde KFD'nin Maxwell denklemlerine uygulanarak sonlu farklar yöntemi ile çözülebileceğine değinilmiştir.

2. Kesirli Fourier Dönüşümü

Kesirli Fourier Dönüşümü (KFD), zaman-frekans analizi, gürültü süzme, radar sinyallerinin işlenmesi, iletişim, hüzmeye şekillendirme, sinyallerin geliş açılarının kestirimi gibi birçok alanda kullanılmaktadır. KFD klasik Fourier dönüşümünün genelleştirilmiş halidir. $f(u)$ sinyalinin KFD'si aşağıdaki gibi verilebilir [5; 6]:

$$f_a(u) \equiv (F^a f)(u) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} K_a(u, u') f(u') du' \quad (1)$$

Yukarıdaki denklemde $K_a(u, u')$ çekirdek fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$K_a(u, u') \equiv \sqrt{1 - i \cot \alpha} e^{i\pi(u^2 \cot \alpha - 2uu' \csc \alpha + u'^2 \cot \alpha)} \quad (2)$$

Burada, a KFD'nin kesir değerini göstermektedir. KFD, sinyalin zaman-frekans gösteriminin $\alpha = \pi/2$ açısı kadar dönmesine neden olur. KFD $a=0$ için zaman sinyalinin

kendisini, $a=1$ için sinyalin klasik Fourier dönüşümünü verir. Bir sinyalin KFD'si, a kesir değerli Fourier bölgesindedir.

Bir sonraki bölümde ZBSF yöntemi anlatılacaktır.

3. Zaman Bölgesinde Sonlu Farklar Yöntemi

Zaman Bölgesinde Sonlu Farklar (ZBSF) yöntemi 1966 yılında Yee tarafından önerilmiştir [7]. ZBSF yöntemi diferansiyel denklem çözen ve zaman bölgesi tabanlı yöntemlerdendir. ZBSF yöntemi Maxwell denklemlerindeki türevlerin sonlu farklar ile ayrıklaştırılmasına dayanır. Aşağıdaki denklemde $f(x)$ fonksiyonunun x_m noktasındaki birinci dereceden türevinin, merkezi sonlu farklar yöntemi ile ayrıklaştırılmış yaklaşımı verilmektedir [8; 9].

$$\left. \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right|_{x_m} \cong \frac{f(x_m + \Delta x/2) - f(x_m - \Delta x/2)}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (3)$$

Yukarıdaki denklemde $O(\Delta x^2)$ ayrık yaklaşım hatasının mertebesini ifade eder. Δx adım uzunluğudur ve Δx sıfıra yaklaştıkça (3) gerçek değerine yakınsar.

Uzayın her noktasında elektrik ve manyetik alanlar ve yükler arasındaki ilişkiyi veren Maxwell denklemlerinin diferansiyel biçimleri aşağıda verilmektedir.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7)$$

Yukarıdaki denklemlerde \mathbf{E} elektrik alan, \mathbf{D} elektrik akı yoğunluğu, \mathbf{H} manyetik alan ve \mathbf{B} manyetik akı yoğunluğu vektörleridir. \mathbf{J} akım yoğunluğu vektörü, ρ ise elektriksel yük yoğunluğudur. Örnek olarak tek boyutta bir düzlem dalga yayılımı düşünülebilir. Tek boyutlu, kayıpsız, kaynak içermeyen bir ortamda x -ekseni yönünde ilerleyen bir düzlem dalga için (4) ve (5) denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (8)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_y}{\partial x} \quad (9)$$

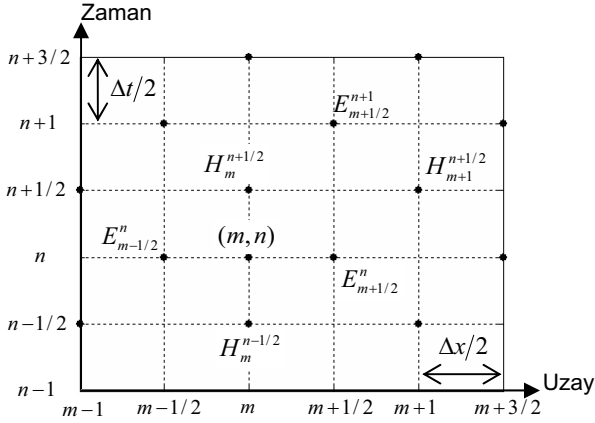
Yukarıdaki denklemlerde ε dielektrik sabiti, μ manyetik geçirgenlik sabitidir. ZBSF yönteminde zaman ve uzaydaki türev ifadeleri sonlu farklar ile yakınlaştırılarak (8) ve (9) denklemleri aşağıdaki gibi ayrık hale getirilebilir.

$$H_m^{n+1/2} = H_m^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} [E_{m+1/2}^n - E_{m-1/2}^n] \quad (10)$$

$$E_{m+1/2}^{n+1} = E_{m+1/2}^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} [H_{m+1}^{n+1/2} - H_m^{n+1/2}] \quad (11)$$

Yukarıdaki denklemlerde m ayrık x -eksenindeki noktaların indisini, n ise ayrık zaman eksenindeki noktaların indisini

göstermektedir. Δx x-eksenindeki adım uzunluğu, Δt ise zaman eksenindeki adım uzunluğudur. Şekil 1, ayrık hale getirilen uzay-zaman düzlemini göstermektedir [9].



Şekil 1. Ayrık uzay-zaman düzlemi

Yukarıda verilen (11) eşitliği incelendiğinde, zamanda bir adım öndeki elektrik alan değerinin, bir önceki adımdaki elektrik alan değeri ve uzayda bu noktaya komşu olan noktalardaki manyetik alan değerlerine bağlı olduğu görülür. Aynı ilişki (10) eşitliğinde de söz konusudur. Sonuç olarak başlangıç değerleri verildiğinde, zaman ilerledikçe her noktadaki elektrik ve manyetik alan değerleri, bir önceki anda hesaplanan elektrik ve manyetik alan değerlerinden bulunabilir.

(11) ve (10) sonlu fark denklemlerinin çözümünün sayısal olarak kararlı olabilmesi için Δx ve Δt adım uzunlukları belirli bir koşulu sağlamalıdır. Fiziksel olarak bu koşul elektromanyetik dalganın Δt süresi boyunca Δx adım uzunluğundan daha fazla ilerlememesini gerektirir. Tek boyutlu bir problem için bu koşul aşağıdaki biçimi alır.

$$c\Delta t \leq \Delta x \quad (12)$$

Yukarıdaki denklemde c boşluktaki ışık hızını ifade eder. Δx adım uzunluğu ise Nyquist örnekleme frekansına karşılık gelen dalga boyundan daha küçük seçilmelidir.

$$\Delta x \leq \frac{\lambda_{\min}}{2} \quad (13)$$

Yukarıdaki ifadede λ_{\min} sistemdeki en büyük frekansa karşılık gelen dalga boyudur. Genel olarak, Δx , $\lambda_{\min}/10$ ile $\lambda_{\min}/40$ arasında seçilmektedir [8].

Sonsuz uzayda yayılım içeren problemlerde, benzetim sınırlı bir alanda yapıldığı için benzetimin sonlandırıldığı noktalarda geri yansıma gözlenebilir. Geri yansımanın olmaması için açık sınır koşulları sağlanmalıdır [8].

Sonraki bölümde KFD'nin Sonlu farklar yöntemine uygulanmasına giriş yapılacaktır.

4. KFD'nin ZBSF Yöntemine Uygulanması

KFD yöntemi Maxwell Denklemlerine uygulanarak hem zaman bölgesi yöntemlerinin hem de frekans bölgesi yöntemlerinin avantajları belli problemler için öne çıkartılabilir.

Tek boyutlu, kayıpsız ve özdeş olarak tanımlanabilen basit bir ortam için Maxwell denklemleri (8) ve (9)'de verilmiştir. KFD, bu denklemlere zaman bölgesinde uygulanırsa a kesir değerli Fourier bölgesinde Maxwell denklemleri aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$j2\pi \sin \alpha u H_{y,a}(x,u) + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial u} H_{y,a}(x,u) = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} E_{z,a}(x,u) \quad (14)$$

$$j2\pi \sin \alpha u E_{z,a}(x,u) + \cos \alpha \frac{\partial}{\partial u} E_{z,a}(x,u) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} H_{y,a}(x,u) \quad (15)$$

Yukarıdaki denklemler $\alpha = 0$ için zaman bölgesindeki Maxwell denklemlerine, $\alpha = \pi/2$ için Maxwell denklemlerinin Fourier dönüşümüne karşılık gelmektedir. (14) ve (15) denklemleri merkezi sonlu farklar ile ayrık hale getirilirse aşağıdaki sonlu fark denklemleri elde edilebilir.

$$H_{m,a}^{n+1/2} = H_{m,a}^{n-1/2} \left(\frac{\cos \alpha - j\pi u_n \Delta u \sin \alpha}{\cos \alpha + j\pi u_n \Delta u \sin \alpha} \right) + \frac{\Delta u [E_{m+1/2,a}^n - E_{m-1/2,a}^n]}{\mu \Delta x (\cos \alpha + j\pi u_n \Delta u \sin \alpha)} \quad (16)$$

$$E_{m+1/2,a}^{n+1} = E_{m+1/2,a}^n \left(\frac{\cos \alpha - j\pi u_n \Delta u \sin \alpha}{\cos \alpha + j\pi u_n \Delta u \sin \alpha} \right) + \frac{\Delta u [H_{m+1,a}^{n+1/2} - H_{m,a}^{n+1/2}]}{\varepsilon \Delta x (\cos \alpha + j\pi u_n \Delta u \sin \alpha)} \quad (17)$$

Yukarıdaki denklemlerde $u_n = n\Delta u$, a kesir değerli Fourier bölgesindeki n indisli noktanın u değerini göstermektedir. Ayrık sonlu fark (16) ve (17) denklemleri sürekli eşdeğerlerinde olduğu gibi, α 'nın, sırasıyla, 0 ve $\pi/2$ değerleri için zaman ve frekans bölgesindeki sonlu fark biçimlerini almaktadır.

Zaman bölgesinde verilen bir kaynağın KFD'si kaynak olarak (16) ve (17) eşitliklerine uygulanarak a kesir değerli Fourier bölgesinde sistem çözülebilir ve ters KFD ile çözüm zaman bölgesine geri dönüştürülebilir.

5. Tartisima

Günümüzde elektromanyetik alanında karşılaşılan problemlerin çözümünde sayısal elektromanyetik yöntemleri ağırlık kazanmıştır. Sayısal elektromanyetik yöntemleri zaman ve frekans tabanlı olarak sınıflandırılabilir. Zaman bölgesi tabanlı yöntemler ile, sistemin geçici tepkisinin gözlenmesi ve tek bir benzetimle geniş bir frekans bandında sistem tepkisinin elde edilmesi mümkündür. Frekans tabanlı yöntemler ise sistemin durağan hal tepkisini verirken, geniş bantlı problemler için hesaplama karmaşıklığı artmaktadır. Her iki yöntemin de avantajlarını ön plana çıkarabilecek bir yöntemin geliştirilebileceği düşünülmektedir. KFD uygulayarak, sayısal yöntemler a kesir değerli Fourier bölgelerinde uygulanabilir. Bu sayede bazı durumlar için hesaplama karmaşıklığının azalacağı öngörülmektedir. Gelecekte yapılacak çalışmalarda KFD'nin ZBSF yöntemine uygulanabilmesi için gerekli olan kararlılık ve sınır koşulları incelenecek, ve tek boyutlu uzayda, basit ortamda düzlem dalganın yayılımı a kesir değerli Fourier bölgesinde çözülmeye çalışılacaktır.

6. Kaynakça

- [1] Poljak, D., *Advanced Modeling in Computational Electromagnetic Compatibility*, John Wiley & Sons, New York, 2007.
- [2] Miller, E. K., "A selective survey of computational electromagnetics", *IEEE Trans. On Antennas & Propagat.*, Vol. 36, No. 9, 1988, p 1281-1305.
- [3] Sevgi, L., *Elektromanyetik Problemler ve Sayısal Yöntemler*, Birsen Yay., İstanbul, 1999.
- [4] Rao, S. M., *Time Domain Electromagnetics*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [5] Özaktaş, H. M., Zalevsky, Z., Kutay, M. A., *The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing*, John Wiley & Sons, New York, 2001.
- [6] Candan, Ç., "The Discrete Fractional Fourier Transform", MS. Thesis, Bilkent University, Ankara, 1998.
- [7] Yee, K. S., "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations", *IEEE Trans. AP*, vol. 14, no. 3, p 302-307, 1966.
- [8] Taflove, A., *Computational Electromagnetics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, Artech House, Norwood, MA, 1995.
- [9] Stutzman, W. L., Thiele, G. A., *Antenna Theory and Design*, John Wiley & Sons, New York, 1998.