

Sinyal Rasgeleleştirmenin İkili Haberleşme Sistemlerinin Performansına Etkisi

Effects of Signal Randomization on Performance of Binary Communications Systems

Çağrı Göken, Sinan Gezici, Orhan Arıkan

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Bilkent Üniversitesi, Bilkent, Ankara 06800, Türkiye
{goken,gezici,oarikan}@ee.bilkent.edu.tr

Özetçe

Bu bildiriye, sinyal rasgeleleştirmenin ikili iletişim sistemlerine etkisi çalışılmaktadır. İlk olarak, güç kısıtlanmış ikili iletişim sistemlerinde ortalama hata olasılığının, her bir sinyal en fazla iki değer arasında rasgeleleştirildiğinde en düşük değere ulaştığı ifade edilmektedir. Daha sonra, sabit bir sezici için sinyal rasgeleleştirmenin performans artışı sağlayıp sağlayamayacağı koşullar incelenmektedir. Ayrıca, sinyal yapısının ve sezicinin beraber dizayn edildiği durum çalışılmakta ve optimal sistem parametrelerini belirlemek için bir optimizasyon problemi formüle edilmektedir. Son olarak, sayısal sonuçlar sunularak, sinyal rasgeleleştirmenin sağladığı gelişimler örneklenmektedir.

Abstract

In this paper, effects of signal randomization are studied for binary communications systems. First, it is stated that the average probability of error for a power-constrained binary communications system is minimized when each symbol is randomized between at most two signal values. Then, a fixed detector is considered, and sufficient conditions under which its performance can or cannot be improved via signal randomization are presented. After that, the joint design of detectors and signal structures is studied, and an optimization problem is formulated to determine the optimal system parameters. Finally, numerical results are presented to exemplify the improvements via signal randomization.

1. Giriş

Beyaz Gauss gürültüsü altında çalışan ve $i = 0, 1$ için $E\{|s_i|^2\} \leq A$ şeklinde ortalama güç kısıntısının etkin olduğu ikili iletişim sistemlerinde ortalama hata olasılığı, $s_0 = -s_1$ şeklindeki deterministik sinyaller güç limitinde kullanıldığında ve alıcıda maksimum sonsal olasılık ("maximum a posteriori probability", MAP) kuralı işletildiği zaman minimize edilir [1]. Ayrıca renkli Gauss gürültüsü altında, Gauss gürültüsünün eşdeğışki matrisinin en küçük özdeğerine karşılık gelen özvektörü doğrultusunda seçilen deterministik ve zıt sinyaller, ortalama hata olasılığını minimize ederler [1]. Gürültü Gauss olduğu zamanki optimal sezici ve işaretleme yöntemleri literatürde mevcuttur. Ancak, ortamdaki gürültü, karışma ya da frekans bozucular sayesinde Gauss'dan daha farklı bir dağılıma sahip olabilir [2]. Böyle durumlarda, sinyalleri s_0 ve s_1 gibi rastsal değışkenler şeklinde modellemek, deterministik sinyallerin vereceğı hata oranına kıyasla, daha düşük bir hata oranı verebilir. [3] numaralı çalışmada, iki adet deterministik sinyal çifti arasında

rastgeleleştirme ve bunlara karşılık gelen MAP sezicileri incelenmiştir. Bu rastgeleleştirme sırasında alıcının hangi deterministik sinyal çiftinin gönderileceğini bildiğı varsayılmıştır. Ayrıca güç rastgeleleştirmesinin önemli bir performans artışı sağlayabileceğı gösterilmiştir.

Bu bildiriye, [4] ve [5] numaralı çalışmalar temel alınarak, güç kısıtlaması altında en genel optimal stokastik işaretleme problemi formüle edilmekte ve sinyal rasgeleleştirmenin etkileri incelenmektedir. Öncelikle, sabit bir sezici için optimal işaretleme problemi tartışılmakta ve stokastik işaretlemenin (rasgeleleştirme kullanmanın) deterministik işaretlemeye kıyasla daha iyi performans göstermesi için yeter koşullar sunulmaktadır [4]. Daha sonra, stokastik işaretleme ile optimal sezicinin ortak optimizasyonu üzerine yoğunlaşmakta ve optimal çözümün fonksiyon seti üzerinde değıl de birkaç değışken üzerinde arama yaparak bulunabileceğı gösterilmektedir [5]. Optimal çözümleri elde etmek için parçacık sürü optimizasyonu ("particle swarm optimization", PSO) adı verilen bir optimizasyon yöntemi kullanılmaktadır [6]. En son kısımda ise sayısal sonuçlarla stokastik işaretlemenin performans artışı sağladığı durumlar örneklendirilmektedir.

2. Problem Tanımı

Gürültülü bir ikili iletişim kanalında, alıcıda gözlemlenen K boyutlu ölçüm aşağıdaki şekilde modellenmektedir:

$$\mathbf{y} = \mathbf{s}_i + \mathbf{n}, \quad i \in \{0, 1\} \quad (1)$$

Burada \mathbf{y} gürültülü ölçümü, \mathbf{s}_0 ve \mathbf{s}_1 sırasıyla 0 sembolü ve 1 sembolü için gönderilmiş sinyal değerlerini ve \mathbf{n} ise s_i 'den bağımsız olan gürültüyü simgelemektedir. Ayrıca π_0 ve π_1 şeklinde gösterilen önsel olasılıkların da bilindiğini varsayılmaktadır. Alıcı, (1)'deki ölçümleri kullanarak, yollanmış sembolü sezimler. Bu amaçla, mevcut \mathbf{y} ölçümü için, en genel sezici (karar kuralı) aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\phi(\mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{y} \in \Gamma_{\phi_0} \\ 1, & \mathbf{y} \in \Gamma_{\phi_1} \end{cases} \quad (2)$$

Burada Γ_{ϕ_0} ve Γ_{ϕ_1} sırasıyla, 0 sembolü ve 1 sembolü için karar bölgelerini simgelemektedir [1].

Belirlenmiş bir sezici ϕ için, ortalama hata olasılığı $P_e = \pi_0 P_{e,0} + \pi_1 P_{e,1}$ şeklinde ifade edilebilir. Burada, $i = 0, 1$ için,

$$P_{e,i} = \int_{\Gamma_{\phi_1-i}} p_i(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (3)$$

ifadesi koşullu hata olasılığını ifade eder. Ayrıca $p_i(\mathbf{y})$, i 'nci sembol gönderildiği zamanki koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu (OYF) simgelemektedir.

Bu çalışmada stokastik işaretleme (rasgeleleştirme) yapılacağı için, (1)'deki s_0 ve s_1 , rastsal değişken olarak modellenmektedir. Sinyal ve gürültü birbirinden bağımsız olduğu için, ölçümlerin koşullu OYF'leri, $i = 0, 1$ için, $p_i(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^K} p_{s_i}(\mathbf{x})p_n(\mathbf{y} - \mathbf{x}) dx$ şeklinde hesaplanabilir. Bazı işlemlerden sonra, (3)'teki denklem

$$P_{e,i} = E \left\{ \int_{\Gamma_{\phi_{1-i}}} p_n(\mathbf{y} - \mathbf{s}_i) dy \right\} \triangleq E \{ f(\phi; \mathbf{s}_i) \} \quad (4)$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradaki beklenti işlemi, s_i 'lerin OYF'leri üzerinden alınmıştır.

Pratik sistemlerde sinyallerin ortalama güçleri kısıtlıdır. Bu durum, aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$E \{ |s_i|^2 \} \leq A, \quad \text{for } i = 0, 1. \quad (5)$$

Burada A , ortalama güç sınırıdır. Bu durumda, optimal işaretleme ve sezici problemi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \min_{p_{s_0}, p_{s_1}, \phi} \quad & \pi_0 P_{e,0} + \pi_1 P_{e,1} \\ E \{ |s_i|^2 \} \leq A, \quad & i = 0, 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Bu ifadede $P_{e,i}$, (4)'te verildiği gibidir.

Aşağıdaki lemma, herhangi sabit bir sezici için, optimal sinyal OYF'lerinin hangi formda olacağını gösterir. Bu lemma, optimizasyon probleminin kolaylaştırılmasında faydalı olacaktır.

Lemma 1: (4) numaralı denklemde ifade edilmiş olan $f(\phi; \mathbf{s}_i)$ 'nin, s_i 'nin sürekli bir fonksiyonu olduğu ve s_i vektörünün her elemanının, sonlu bir $\gamma > 0$ sayısı için $[-\gamma, \gamma]$ aralığında yer aldığı varsayalım. Bu durumda, sabit bir sezici ϕ için, (6)'da verilmiş olan optimizasyon probleminin çözümü, $i = 0, 1$ ve $\lambda_i \in [0, 1]$ için, aşağıdaki formdadır:

$$p_{s_i}(\mathbf{y}) = \lambda_i \delta(\mathbf{y} - \mathbf{s}_{i1}) + (1 - \lambda_i) \delta(\mathbf{y} - \mathbf{s}_{i2}). \quad (7)$$

Bu lemanın ispatı [5] numaralı çalışmada sunulmaktadır.

3. Optimal İşaretleme

Bu bölümde farklı seziciler için optimal işaretleme problemi incelenmektedir. İlk önce, sabit bir sezicinin kullanıldığı durum için optimal işaretleme tartışılmakta ve daha sonra optimal işaretleme ile optimal sezicinin ortak tasarımı konusu ele alınmaktadır.

3.1. Sabit Bir Sezici İçin Optimal İşaretleme

Bu senaryoda, (1)'de verilen model kullanılıp, alıcıdaki ölçümlerin sayıl olduğu varsayılmaktadır. Ayrıca, sezicinin karar bölgelerinin de değişmeyecek şekilde atandığı kabul edilmektedir. Bu varsayımlar altında, (6)'da verilmiş olan optimizasyon problemi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \min_{p_{s_0}, p_{s_1}} \quad & P_{\text{avg}}^{\text{stoc}} \\ E \{ |s_i|^2 \} \leq A, \quad & i = 0, 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Burada $P_{\text{avg}}^{\text{stoc}}$, şu şekilde hesaplanmaktadır:

$$\begin{aligned} P_{\text{avg}}^{\text{stoc}} = \quad & \pi_0 \int_{-\infty}^{\infty} p_{s_0}(t) \int_{\Gamma_1} p_n(y - t) dy dt \\ & + \pi_1 \int_{-\infty}^{\infty} p_{s_1}(t) \int_{\Gamma_0} p_n(y - t) dy dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Denklem (8)'deki koşullara ek olarak, problemin çözümü olacak olan p_{s_0} ve p_{s_1} fonksiyonlarının OYF kurallarına uyması gerekir.

En küçük değeri bulunmaya çalışılan $P_{\text{avg}}^{\text{stoc}}$ fonksiyonunun yapısı ve her sinyal üzerindeki ayrı ayrı kısıtlamalar nedeniyle, (8)'deki genel optimizasyon problemi, iki ayrışık optimizasyon problemi halinde yazılabilir [4]. Bu durumda, örneğin birinci sinyal için, problem şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \min_{p_{s_1}} \quad & E \{ G(s_1) \}, \\ E \{ |s_1|^2 \} \leq A. \end{aligned} \quad (10)$$

Burada

$$G(s_1) \triangleq \int_{\Gamma_0} p_n(y - s_1) dy \quad (11)$$

olarak tanımlanmaktadır. Benzer bir formülasyon, sembol 0 için de yazılabilir. İlerleyen bölümlerde, gösterim kolaylığı açısından, sembol indisleri kullanılmayacaktır.

3.1.1. Klasik İşaretlemenin Optimalliği Üzerine

Bazı koşullar altında, basit bir şekilde, $s_1 = -s_0 = \sqrt{A}$ sinyallerini seçmek, (8)'de verilen optimizasyon problemini çözmektedir [1]. Bu bildiriye bu basit çözüm, "klasik işaretleme" olarak adlandırılmaktadır. Bu bölümde, klasik işaretlemenin optimal olduğu ve geliştirilebileceği durumlar için yeter koşullardan bahsedilmektedir. Öncelikle, klasik işaretlemenin optimal olması için bir yeter koşul, aşağıdaki önermede sunulmaktadır [4].

Önerme 1: Eğer $G(x)$ kesin dışbükey ve monoton azalan bir fonksiyonsa, $p_S(x) = \delta(x - \sqrt{A})$, (10)'daki optimizasyon probleminin çözümüdür.

İspat: Bu önerme, çelişkiyle ispat yöntemi kullanılarak ispat edilebilir. Öncelikle, klasik çözüm $p_S(x) = \delta(x - \sqrt{A})$ 'yı optimal altı yapacak bir OYF olan $p_{S_2}(x)$ 'nin var olduğu farzedilsin. Öyleyse, (10)'daki kısıtlamaya göre $E \{ G(s) \} < G(\sqrt{A})$ olmalıdır.

$G(x)$ 'in kesin dışbükey bir fonksiyon olması ve Jensen eşitsizliği nedeniyle, $E \{ G(s) \} > G(E \{ s \})$ sağlanmaktadır. Öyleyse, $G(x)$ monoton azalan bir fonksiyon olduğundan, $E \{ G(s) \} < G(\sqrt{A})$ eşitsizliğinin tutması için, $E \{ s \} > \sqrt{A}$ olmalıdır.

Öte yandan, yine Jensen eşitsizliğine göre, $E \{ s \} > \sqrt{A}$ iken, $E \{ s^2 \} > (E \{ s \})^2 > A$ olur. Bu da (10)'daki güç kısıtlamasının ihlal edildiğini gösterir. O halde, önermedeki koşullar altında, hiç bir OYF'nin, verilen güç kısıtlaması altında $E \{ G(s) \} < G(\sqrt{A})$ 'yı sağlayamayacağı ispatlanmıştır. \square

3.1.2. Geliştirilebilirlik için Yeter Koşullar

Bu bölümde, klasik çözümün hangi durumlarda, stokastik işaretlemeden daha kötü bir performans vereceği bulunacaktır. Örneğin, (10) incelendiğinde, eğer $G(x)$ en küçük değerine x_{\min} 'de ulaşmışsa ve $x_{\min}^2 \leq A$ ise, $p_S(x) = \delta(x - x_{\min})$, klasik çözümden daha iyi bir çözüm olacaktır. Başka bir durumda, $G(x)$ 'in $x = \sqrt{A}$ 'daki türevinin pozitif olması halinde, $p_{S_2}(x) = \delta(x - \sqrt{A} + \epsilon)$, çok küçük $\epsilon > 0$ değerleri için klasik çözümden daha küçük bir ortalama hata olasılığı verecektir [4].

Yukarıda bahsedilen iki koşul da klasik çözümün geliştirilebilirliği hususunda yeter koşullar arasındadır. Ancak bu koşullar, uygulamada nadiren sağlanır. Çünkü $G(x)$ genellikle x 'in azalan bir fonksiyonudur. Öyleyse, daha genel ve sağlanabilir bir yeter koşul şu şekilde ifade edilebilir:

Önerme 2: $G(x)$ 'in iki kere sürekli olarak türevlenebilir olduğu varsayılınsın. Eğer $G''(\sqrt{A}) < G'(\sqrt{A})/\sqrt{A}$ ise, $p_S(x) = \delta(x - \sqrt{A})$, (10)'daki problemin optimal bir çözümü olamaz.

Bu önermenin ispatı [4] numaralı çalışmada sunulmaktadır.

3.2. Optimal Sezici ve Optimal İşaretleme

Bu bölümde, sezicinin sabit olmadığı ve optimal sinyal ile sezicinin ortak olarak tasarlandığı durum tartışılmaktadır. Lemma 1'de ifade edildiği gibi, bazı koşullar altında, optimal stokastik işaretleme bir sembol için iki farklı sinyal seviyesi arasında rastgeleleştirmeyi öngörür. Öyleyse, (6)'daki problem, (7)'deki gibi sinyal OYF'leri üzerinde arama yapılarak çözülebilir. Bu da arama yapılması gereken uzayı büyük oranda küçültür. Aşağıda verilen önerme, problemi daha da kolaylaştırmaktadır [5].

Önerme 3: Lemma 1'de verilmiş koşullar altında, (6)'da verilmiş olan optimizasyon problemi şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} \min_{\{\lambda_i, s_{i1}, s_{i2}\}_{i=0}^1} & \int_{\mathbb{R}^K} \min\{\pi_0 p_0(\mathbf{y}), \pi_1 p_1(\mathbf{y})\} d\mathbf{y} \\ & \lambda_i |s_{i1}|^2 + (1 - \lambda_i) |s_{i2}|^2 \leq A \\ & \lambda_i \in [0, 1], \quad i = 0, 1 \end{aligned} \quad (12)$$

Burada, $g_i(\mathbf{y}) = \lambda_i p_n(\mathbf{y} - s_{i1}) + (1 - \lambda_i) p_n(\mathbf{y} - s_{i2})$.

İspat: Belirli p_{s_0} ve p_{s_1} gibi iki tane sinyal OYF ikilisi için, (1)'deki \mathbf{y} ölçümlerinin koşulsal olasılığı, $i = 0, 1$ için, $p_i(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^K} p_{s_i}(\mathbf{x}) p_n(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x}$ şeklinde ifade edilebilir. \mathbf{y} gözlemlerine dayanarak, iki sembol arasında karar verme esnasında, MAP sezicisi ortalama hata olasılığını en aza indirger [1]. Bu sezici, eğer $\pi_1 p_1(\mathbf{y}) \geq \pi_0 p_0(\mathbf{y})$ ise 1 sembolünü, diğer hallerde ise 0 sembolünü seçer. O halde, sinyal OYF'leri p_{s_0} ve p_{s_1} belirlendiğinde, bütün seziciler arasında arama yapmak yerine, MAP kuralı ve ona denk gelen ortalama hata olasılığı dikkate alınmalıdır.

(3) numaralı ifade kullanılarak, herhangi bir sezici ϕ için, ortalama hata olasılığı şu şekilde yazılabilir:

$$P_e = \int_{\Gamma_{\phi_1}} \pi_0 p_0(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\Gamma_{\phi_0}} \pi_1 p_1(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (13)$$

MAP sezicisi, eğer $\pi_1 p_1(\mathbf{y}) \geq \pi_0 p_0(\mathbf{y})$ ise 1 sembolünü, değilse 0 sembolünü seçtiğinden ötürü, (13)'te verilmiş olan ortalama hata olasılığı MAP sezicisi için, şu şekilde yazılabilir [7]:

$$P_e = \int_{\mathbb{R}^K} \min\{\pi_0 p_0(\mathbf{y}), \pi_1 p_1(\mathbf{y})\} d\mathbf{y}. \quad (14)$$

Ayrıca, Lemma 1'e göre, optimal sinyal OYF'leri (7)'de verildiği gibi olup, koşullu OYF'ler $p_i(\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^K} p_{s_i}(\mathbf{x}) p_n(\mathbf{y} - \mathbf{x}) d\mathbf{x}$ şeklinde elde edilebilir. (6)'daki güç kısıtlaması da $i = 0, 1$ için $\lambda_i |s_{i1}|^2 + (1 - \lambda_i) |s_{i2}|^2 \leq A$ durumuna karşılık gelir. Öyleyse, (14)'e göre, (6)'daki optimizasyon problemi, önermedeki kısıtlamalı minimizasyon problemi halinde çözülebilir. □

(6)'da verilen optimizasyon problemini çözmeye nispeten, (12)'de önerilen problemi çözmek daha kolaydır. Çünkü ikicisinde gerekli arama, bir fonksiyon seti üzerinde değil, değişken seti üzerinde yapılır. Ancak problem bu haliyle dahi, dışbükey bir optimizasyon problemi olmadığı için, optimal OYF'lerin elde edilmesinde, PSO [6] gibi, küresel optimizasyon yöntemleri kullanmak gerekir. Bu çalışmada, hem (10)'un hem de (12)'nin çözümü için, PSO yaklaşımı kullanılacaktır. PSO algoritması düşük hesaplama karmaşıklığına sahip olup,

basit yinelemeler esasına dayanır. Daha detaylı bilgi için [6] numaralı kaynağa başvurulabilir.

(12)'deki optimizasyon probleminin çözümünü elde ettikten sonra, optimal sinyaller, $i = 0, 1$ için, $p_{s_i}^{\text{opt}}(\mathbf{y}) = \lambda_i^{\text{opt}} \delta(\mathbf{y} - s_{i1}^{\text{opt}}) + (1 - \lambda_i^{\text{opt}}) \delta(\mathbf{y} - s_{i2}^{\text{opt}})$ şeklinde olur. Optimal sezici ise MAP sezicisini kullanır ve eğer $\pi_1 p_1(\mathbf{y}) \geq \pi_0 p_0(\mathbf{y})$ ise 1 sembolünü, değil ise 0 sembolünü seçer. Bu durumda, $i = 0, 1$ için, $p_i(\mathbf{y}) = \lambda_i^{\text{opt}} p_n(\mathbf{y} - s_{i1}^{\text{opt}}) + (1 - \lambda_i^{\text{opt}}) p_n(\mathbf{y} - s_{i2}^{\text{opt}})$ olarak hesaplanır.

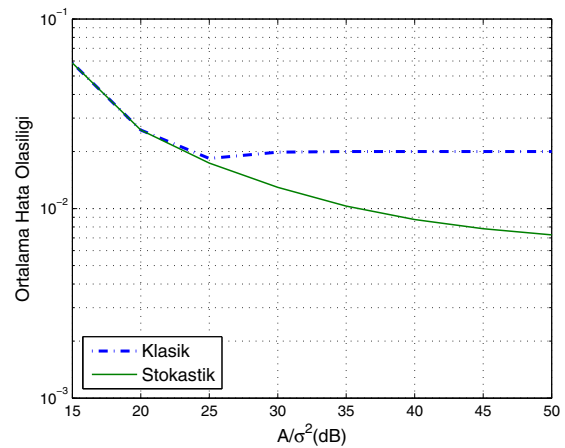
Son olarak, simetrik işaretleme için, yani, $s_{01} = -s_{11}$, $s_{02} = -s_{12}$ ve $\lambda_0 = \lambda_1$ iken, (12)'deki optimizasyon, sadece s_{11} , s_{12} ve λ_1 üzerinden yürütülebilir.

4. Sayısal Sonuçlar

Bu kısımda, bu çalışmada bahsedilen sezici türleri için optimal stokastik işaretleme yapıp, sayısal örneklerle, optimal işaretleme ile klasik çözüm arasındaki performans farkı incelenmektedir. Ortamda etkili olan gürültünün, karışımının da etkisiyle, Gauss karışım gürültüsü olduğu varsayılmakta

ve bu gürültü $p_n(\mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \sum_{i=1}^L v_i e^{-\frac{(y-\mu_i)^2}{2\sigma^2}}$ şeklinde gösterilmektedir. İki tür sezici için de, (5)'teki güç limiti $A = 0.5$ olarak alınmakta ve sembollerin eşit önsel olasılıklara sahip oldukları ($\pi_0 = \pi_1 = 0.5$) kabul edilmektedir.

İlk olarak, sabit bir sezici için stokastik işaretleme yapılmıştır. Sabit sezici, oldukça basit bir sezici olan işaret sezicisi olarak modellenmiş, yani $\Gamma_0 = (-\infty, 0)$ ve $\Gamma_1 = [0, \infty)$ kullanılmıştır. Ayrıca, simülasyonlarda $\mathbf{v} = [0.19 \ 0.29 \ 0.02 \ 0.02 \ 0.29 \ 0.19]$ ve $\boldsymbol{\mu} = [0.226 \ 0.58 \ 0.76 \ -0.76 \ -0.58 \ -0.226]$ şeklinde alınmıştır. Bu durumda, (11)'den hareketle, $G(x) = \sum_{l=1}^L v_l Q\left(\frac{x+\mu_l}{\sigma}\right)$ şeklinde elde edilmiştir. Bu koşullar altında, PSO algoritması koşturularak, aşağıdaki grafik elde edilmiştir.



Şekil 1: Stokastik ve klasik işaretleme için işaret sezicisinin ortalama hata olasılıkları.

Şekil 1'de görüldüğü üzere, büyük σ değerleri için, klasik çözümle stokastik çözüm aynı sonucu vermektedir. Fakat σ azaldıkça, stokastik çözüm, klasik çözümden daha iyi bir hata performansı göstermektedir. Bu tarz bir sonucu, Önerme 1 ve 2 ile açıklayabiliriz. A/σ^2 'nin düşük olduğu değerler için $G(x)$ fonksiyonu, azalan ve dışbükey bir yapıda olduğundan, Önerme 1'e göre stokastik işaretleme ile herhangi bir gelişme sağlanamamaktadır. Fakat, özellikle A/σ^2 25 dB'yi aştıktan sonra, Önerme 2'deki koşullar sağlanmaya başladığından, klasik işaretleme, stokastik işaretlemeyle yenilm-

eye başlar. Tablo 1’de bazı A/σ^2 değerleri için optimal sinyal parametreleri verilmiştir.

Tablo 1: Optimal stokastik sinyal parametreleri

A/σ^2 (dB)	Stokastik		
	λ_1	s_{11}	s_{12}
15	N/A	0.7071	0.7071
25	0.7855	0.7658	0.6813
35	0.5146	0.7822	0.6176
45	0.6168	0.7693	0.5934

İkinci olarak, optimal stokastik işaretleme ile sezicinin beraber tasarlandığı bir örnek sunulmaktadır. Bu örnekte de yine sayıl ölçümlerin varlığı kabul edilmektedir. Ayrıca simülasyonlar için, gürültü parametrelerinden \mathbf{v} , $\mathbf{v} = [1/6 \ 1/6 \ 1/6 \ 1/6 \ 1/6 \ 1/6]$ şeklinde alınırken, ilk örnekte kullanılan $\boldsymbol{\mu}$ vektörü bu örnekte de aynen kullanılmaktadır. Bu bölümde şu üç durum için performans karşılaştırması yapılmaktadır:

Klasik: Bu yaklaşımda, sinyaller, $\mathbf{s}_0 = -\sqrt{A}$ ve $\mathbf{s}_1 = \sqrt{A}$ şeklinde seçilmekte ve alıcıda MAP sezicisi kullanılmaktadır.

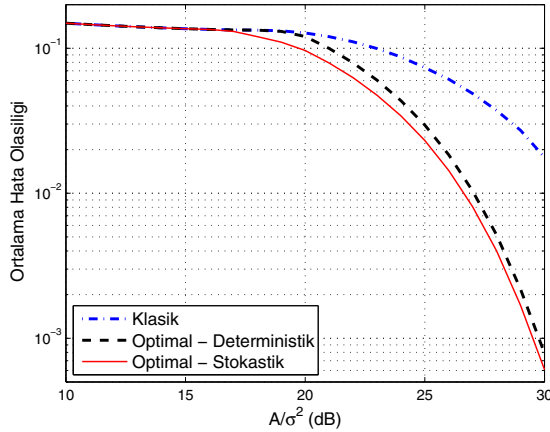
Optimal – Stokastik: Bu yaklaşımda, (12)’de belirtilen optimizasyon probleminin çözümü kullanılmaktadır.

Optimal – Deterministik: Bu yaklaşım, (12)’deki optimal çözümün kolaylaştırılmış halidir. Burada işaretlemenin iki farklı sinyal seviyesi üzerinden rastgeleştirme ile değil de, tek bir seviye üzerinden deterministik olarak yapıldığı varsayılmaktadır. Bu da doğal olarak, (12)’deki problemi aşağıdaki probleme indirgemektedir:

$$\min_{\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1} \int_{\mathbb{R}^K} \min\{\pi_0 p_n(\mathbf{y} - \mathbf{s}_0), \pi_1 p_n(\mathbf{y} - \mathbf{s}_1)\} d\mathbf{y}$$

$$|\mathbf{s}_0|^2 \leq A, \quad |\mathbf{s}_1|^2 \leq A. \quad (15)$$

Bu çözüm, sinyaller deterministik olduğu zamanki optimal çözümü ifade etmektedir.



Şekil 2: Çeşitli A/σ^2 değerleri için, bahsedilen üç yaklaşımın ortalama hata olasılıkları.

Şekil 2’de görüldüğü üzere klasik çözüm, küçük σ değerleri için diğer optimal çözümlerden çok daha kötü bir performans göstermektedir. Ayrıca, stokastik işaretlemeye dayanan optimal çözüm de en iyi performansı vermektedir.

Tablo 2’de sırasıyla, (6) ve (15)’teki optimizasyon problemlerinin optimal stokastik ve deterministik yaklaşımlar için çözümleri verilmiştir. Simetrik işaretleme yapıldığı varsayıldığı için, tabloda 1 sembolü için elde edilen sonuçlar verilmekte

olup, 0 sembolü için olan sinyal seviyeleri, tabloda verilenlerin negatiftir. Küçük A/σ^2 değerleri için, optimal çözümler ile klasik çözüm aynıdır. Yani, $\mathbf{s}_{11} = \mathbf{s}_{12} = \mathbf{s}_1 = \sqrt{A} = 0.7071$. Ancak, A/σ^2 arttıkça, klasik çözüm optimalliğini kaybetmektedir. Ayrıca optimal stokastik çözüm, rastgeleştirme sayesinde, yüksek A/σ^2 değerleri için en iyi performansı sağlamaktadır. Örneğin $A/\sigma^2 = 30$ dB iken, optimal deterministik yaklaşım $\mathbf{s}_1 = -\mathbf{s}_0 = 0.335$ sinyallerine ve 7.87×10^{-4} ’lük bir hata oranına karşılık gelmektedir. Öte yandan optimal stokastik çözüm, $A/\sigma^2 = 30$ dB iken, $\mathbf{s}_{11} = -\mathbf{s}_{01} = 1.341$ ve $\mathbf{s}_{12} = -\mathbf{s}_{02} = 0.335$ arasında $\lambda_0 = \lambda_1 = 0.2301$ olacak şekilde bir rastgeleştirme yapmakta ve 6.07×10^{-4} ’lük bir hata oranına ulaşmaktadır.

Tablo 2: Optimal stokastik ve deterministik sinyal parametreleri

A/σ^2 (dB)	Stokastik			Deterministik
	λ_1	\mathbf{s}_{11}	\mathbf{s}_{12}	\mathbf{s}_1
10	N/A	0.7071	0.7071	0.7071
15	N/A	0.7071	0.7071	0.7071
20	0.2147	1.379	0.3414	0.5747
25	0.2233	1.359	0.3354	0.3356
30	0.2301	1.341	0.3350	0.3350

5. Sonuçlar

Bu çalışmada, güç kısıtlaması altında, ikili iletişim sistemlerindeki, optimal stokastik işaretleme üzerine çalışıldı. Öncelikle optimal sinyalin, iki farklı sinyal seviyesinin rastgeleştirilmesi ile elde edilebildiğinden bahsedildi. Daha sonra sabit bir sezici için, klasik işaretleme yönteminin optimal olduğu ya da geliştirilebildiği koşullar ifade edildi. Bundan sonraki bölümde, optimal sezici ile optimal stokastik işaretlemenin tasarımı beraber yapıldı ve optimal stokastik sinyaller ile buna karşılık gelen ve MAP sezicisini kullanan sezici elde edildi. Öne sürülen optimizasyon probleminin çözümü için PSO yöntemi kullanıldı ve kuramsal sonuçları desteklemek için sayısal örnekler verildi.

6. Kaynakça

- [1] H. V. Poor, *An Introduction to Signal Detection and Estimation*, 2nd ed., New York: Springer-Verlag, 1994.
- [2] V. Bhatia, B. Mulgrew, “Non-parametric likelihood based channel estimator for Gaussian mixture noise,” *Signal Processing*, vol. 87, pp. 2569–2586, Nov. 2007.
- [3] A. Patel, B. Kosko, “Optimal noise benefits in Neyman-Pearson and inequality-constrained signal detection,” *IEEE Trans. Sig. Processing*, vol. 57, no. 5, pp. 1655–1669, May 2009.
- [4] Ç. Göken, S. Gezici, O. Arıkan, “Stochastic signaling under second and fourth moment constraints,” *IEEE International Workshop on Signal Processing Advances for Wireless Communications (SPAWC)*, June 2010.
- [5] Ç. Göken, S. Gezici, O. Arıkan “Optimal signaling and detector design for power-constrained binary communications systems over non-Gaussian channels,” *IEEE Communication Letters*, vol. 14, no. 2, Feb. 2010.
- [6] K. E. Parsopoulos, M. N. Vrahatis, *Particle swarm optimization method for constrained optimization problems*. IOS Press, 2002, pp. 214–220, in *Intelligent Technologies–Theory and Applications: New Trends in Intelligent Technologies*.
- [7] M. Azizoglu, “Convexity properties in binary detection problems,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 42, no. 4, pp. 1316–1321, July 1996.