

ELLİPSÖİD GENİŞLETMEYLE SEYREK SİNYAL GERİ OLUŞTURMA SPARSE SIGNAL RECONSTRUCTION WITH ELLIPSOID ENLARGEMENT

Ali Cafer Gürbüz^{1*}, Mert Pilancı², Orhan Arıkan³

¹Elektrik ve Elektronik Mühendisliği, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

²Elektrik ve Elektronik Mühendisliği, University of California at Berkeley

³Elektrik ve Elektronik Mühendisliği, Bilkent Üniversitesi

ÖZETÇE

Bu makalede $b = Ax + n$ şeklinde gürültülü A 'nın tam rank ve x 'in seyrek olduğu doğrusal bir denklem sistemi için seyrek x sinyallerini doğru olarak geri oluşturmaya yönelik yeni bir yöntem sunulmuştur. Önerilen yöntem kullanılan veri sinirini belirleyen $\|Ax - b\|_2 = \epsilon$ ellipsoidinin genişletilirken sırayla eksenlerin sıfırlanmasına dayanan yinelemeli bir yöntemdir. Seyrek sinyal oluşturma alanında yinelemeli ve ℓ_1 norm minimizasyon tabanlı standard yöntemlere göre benzer problemlerde daha yüksek başarım gösteren metot, eksik belirtilmiş sistemlerde standard metodların oluşturmazı gereken seyreklik seviyesini de yumoşmaktadır.

ABSTRACT

In this work a novel method for reconstructing sparse x in a noisy full rank linear system such as $b = Ax + n$ is developed. The proposed method depends on enlarging the ellipsoid defined by the data constraint $\|Ax - b\|_2 = \epsilon$ and iteratively resetting the axes where the signal is zero. The proposed method has a higher reconstruction performance compared to standard iterative and ℓ_1 norm minimization based sparse recovery methods. Also our method relaxes the sparsity level constraint to be reconstructed by the standard methods for an underdetermined system.

1. GİRİŞ

Günlük hayatta kullanılan birçok sinyalin genellikle bir tanda seyrek veya sıkıştırılabilir olarak ifade edilebiliyor olması seyrek sinyal geri oluşturma yöntemlerine olan ilgiyi son yıllarda özellikle artırmaktadır. Seyrek sinyaller için sinyal işleme teknikleri radardan tıbbi görüntülemeye, video işlemeden haberleşmeye, sensör ağlarına kadar birçok alanda sıkılıkla kullanılmaktadır [1–3]. Son yıllarda sinyal işleme açısından üzerine yoğunlaşan konulardan sıkıştırılmış algılama (CS - compressive sensing) [4, 5] da seyreklik bilgisinin geri oluşturmada kullanılan ölçüm sayısına etkisini ortaya koymuş ve N boyutlu K -seyrek bir sinyalin $M =$

Bu çalışma TÜBİTAK tarafından 109E280 numaralı Kariyer projesi dahilinde ve FP7 Marie Curie Reintegration Grant çerçevesinde PIRG04-GA-2008-239506 numaralı proje tarafından desteklenmektedir.

$O(K \log N)$ doğrusal ölçüm kullanılarak ve ℓ_1 norm minimizasyon tabanlı bir optimizasyon probleminin çözümü olarak elde edilebileceğini ortaya koymuştur. CS ve ondan daha sonra geliştirilen çoğunlukla yinelemeli yöntemler [6–8] seyrek sinyalleri daha az ölçüm kullanarak farklı başarımlarla geri oluşturma çalışmalarında bulunmuşlardır.

Bu çalışmada $b = Ax + n$ şeklinde gürültülü doğrusal bir denklem sisteminde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $m \geq n$ ve tam rank bir matris olduğu durumda $\|Ax - b\|_2 \leq \epsilon_T$ veri sınırlamasını sağlayan en seyrek x sinyalinin bulma problemi için bir çözüm yolu sunulmuştur. A matrisi tam rank olduğu için matris tersi veya en küçük kareler kullanılarak bazı çözümlere ulaşılabilir ancak bu çözümlerin gürültülü durumlarda seyrek çözümler olmayacağıdır. Elbette seyrek sinyal oluşturma yöntemleri bu probleme uygulanabilir ve sonuçlar kısmında gösterilen başarımlarla çalışmaktadır. Önerilen yöntemin CS tabanlı yöntemlere göre değişik gürültü seviyelerinde ve A matrisinin kısıtlı isometri özelligini bozan durumlarda dahi farklı başarı kriterlerine göre yüksek başarım elde ettiği gözlenmiştir. Bu bakımdan önerilen yöntem eksik belirtilmiş sistemlerde seyreklik şartını yumoşatacak bir basamak olarak kullanılabilir. Şöyle ki; CS tabanlı yöntemler sinyalin sıfırdan farklı olduğu K eksenin belirlemek yerine bundan çok daha kolay bir problem olan bu K eksenin içinde olacağı $M \gg K$ eksen seçenekleridir.

Bölüm 2'de önerilen ellipsoid genişletme yöntemi açıklanmıştır. Başarım sonuçları ve simülasyon testleri Bölüm 3'de sunulmuştur. Çıkarımlar Bölüm 4'de bulunabilir.

2. ELLİPSÖİD GENİŞLETME

Gürültülü doğrusal bir denklem sistemi, $b = Ax + n$, ele alalım. Burda $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tam rank ve $m \geq n$ olsun. Böyle bir sisteme seyrek sinyal geri oluşturma probleminde ulaşmak istenen çözüm

$$\hat{x} = \arg \min \|x\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \|Ax - b\|_2 < \epsilon_T \quad (1)$$

ℓ_0 norm minimizasyonudur. Kombinatorik bir çözüm gerektiren (1) verilen data sınırlamasını sağlayan en seyrek x çözümüne ulaşmak istemektedir. İlk olarak veri sınırlaması $\|Ax - b\|_2^2 = \epsilon_T^2$ bir ellipsoid tanımlamaktadır. Diyelim ki küçük bir ϵ için $\|Ax - b\|_2^2 = \epsilon^2$ tarafından tanımlanan ellipsoid üzerindeki noktalar bütün koordinat eksenlerinden uzak

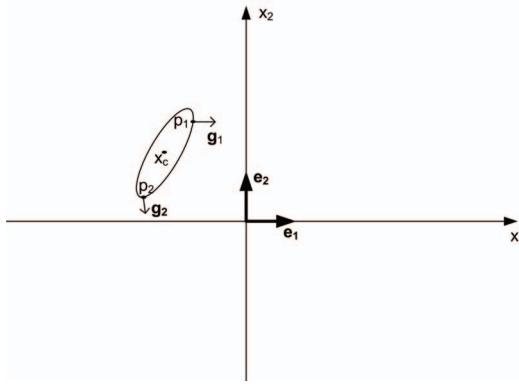


Figure 1: İki boyutta örnek bir durum

olsun. ϵ olabildiğince küçültüllerken bu her zaman sağlanabilir. ϵ artırıldığında da ellipsoidin yüzeyinin bir eksene değiştiği bir ϵ değeri olacaktır. Hedef bu ϵ değerini ve bu değerinin olduğu noktadaki yüzey normalini bularak sırasıyla sıfırlanacak eksenleri belirlemektir.

İlk olarak ellipsoidi tanımlayalım. A matrisini SVD ayırmıştır $A = U\Sigma V^T$ olarak ve buna bağlı olarak da b vektörünü $b = UU^T b + U^\perp U^\perp b$ olarak yazabilirmiz. Bu durumda $\|Ax - b\|_2^2 = \epsilon^2$ ile tanımlanan ellipsoid (2) ile gösterilebilir.

$$\begin{aligned} \|U\Sigma V^T x - UU^T b - U^\perp U^\perp b\|^2 &= \epsilon^2 \\ \|\Sigma V^T x - \beta\|^2 + \|U^\perp b\|^2 &= \epsilon^2 \\ \|\Sigma V^T x - \beta\|^2 &= \epsilon^2 - \|U^\perp b\|^2 = \epsilon_p^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Denklem (2)'de $\beta = U^T b$ olarak tanımlanmıştır. Bu tanımlamaların yanında x noktasındaki ellipsoidin yüzey gradienti $g(x) = V\Sigma(\Sigma V^T x - \beta)$ ve ellipsoidin merkezi $x_c = V\Sigma^{-1}\beta$ olarak bulunabilir.

İki boyutta örnek bir durumun gösterildiği Şekil 1'de e_i i . koordinat ekseni için birim vektörü göstermektedir. Ellipsoid p_i noktası yüzey normali e_i olan yüzeye dokundugunda i . eksene geçmiş olacaktır. Bu durumda ellipsoidin p_i noktasındaki yüzey normali e_i birim vektör doğrulusunda olmalıdır. Yani dokumanın gerçekleştiği p_i noktasındaki gradient

$$g(p_i) = -\lambda_i sgn(x_{c,i})e_i \quad \lambda_i > 0 \quad (3)$$

olarak verilebilir. Bu nedenle ellipsoidin eksenlere dokunacağı p_i noktaları (4) ve (5) ile verilen ilişkileri sağlayan çözümler olarak bulunabilir.

$$g(p_i) = -\lambda_i sgn(x_{c,i})e_i = V\Sigma(\Sigma V^T p_i - \beta) \quad (4)$$

$$\|\Sigma V^T p_i - \beta\|^2 = \epsilon_p^2 \quad (5)$$

Denklem (4) kullanılarak $\Sigma V^T p_i - \beta = -\lambda_i sgn(x_{c,i})\Sigma^{-1}V^T e_i$ olarak yazılabilir. Bu denklem (5)'de yerine koyulursa

$$\lambda_i = \frac{\epsilon_p}{\|\Sigma^{-1}V^T e_i\|} \quad (6)$$

$$g(p_i) = -\frac{sgn(x_{c,i})\epsilon_p}{\|\Sigma^{-1}V^T e_i\|} e_i \quad (7)$$

elde edilir. Bu sonuçlar (4) ile birlikte kullanılırsa p_i noktası

$$p_i = (V\Sigma^2 V^T)^{-1} \left(-\frac{sgn(x_{c,i})\epsilon_i}{\|\Sigma^{-1}V^T e_i\|} e_i + V\Sigma\beta \right) \quad (8)$$

olarak bulunmaktadır. Denklem (8) kısaca $p_i = q_i\epsilon_p + r_i$ olarak yazılabilir. Bu durumda q_i ve r_i

$$q_i = -(V\Sigma^2 V^T)^{-1} \frac{sgn(x_{c,i})\epsilon_i}{\|\Sigma^{-1}V^T e_i\|}$$

$$r_i = (V\Sigma^2 V^T)^{-1} V\Sigma\beta = V\Sigma^{-1}\beta = x_c$$

olarak elde edilmektedir. Kısaca $p_i = q_i\epsilon_p + x_c$ olarak ifade edilebilir. Bu aday değme noktasının koordinat yüzeyine uzaklığını $p_{i,i}$ ile gösterirsek bu uzaklık p_i yüzeye deððinde sıfır olmalıdır. Bu durumda p_i 'nın i . koordinat yüzeyine deðmesini sağlayacak ϵ_p değeri

$$p_{i,i} = 0 = q_{i,i}\epsilon_p + x_{c,i} \Rightarrow \epsilon_{p,i} = -\frac{x_{c,i}}{q_{i,i}} \quad (9)$$

olarak bulunacaktır. Dolayısıyla ellipsoidin ilk olarak bir koordinat eksene deðmesine neden olacak ϵ_p değeri

$$\epsilon_p^* = \min_i \epsilon_{p,i} \quad (10)$$

olacaktır. Bu şekilde ellipsoidin ilk keseceği i^* ekseni sıfırlayıp, yani i^* . sütunu A matrisinden çıkartarak ve ilk olarak tanımlanan veri sınırlaması sağlanana kadar benzer işlemleri tekrarlayarak devam edilir. Çözüm en son sinyal desteğine en küçük kareler uygulanarak elde edilir.

2.1. Tartışma

Çözülmlesi hedeflenen ve (1)'de tanımlanan ℓ_0 norm minimizasyonu sinyalin sıfırdan farklı olduğu eksenleri $N!$ eksen sıfırlama kombinasyonunu deneyerek elde etmeye çalışmaktadır. Önerilen yöntem ise eksenleri sıfırlama sırasında bir algoritma sunmaktadır. Tanımlanan şekil bir ellipsoid yerine küre olsaydı, yani A 'nın singular değerleri eşit olduğu durumda önerilen metot her durumda veri sınırlaması içinde en seyrek çözümü elde edecektir. A 'nın singular değerleri arasındaki fark arttıkça veri sınırlaması daha basık bir ellipsoid halini almaktadır ve sonuçlar bölümünde farklı gürültü ve basıklık değerleri için önerilen yöntemin başarımı standard metodlara göre karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

Algoritmayı kolaylaştıracak önemli bir nokta da sinyal desteğinde olduğu kesin olan eksenlerin ellipsoide dokunma için aranmamasıdır. Eğer $\epsilon_{p,i} > \epsilon_T$ ise i . eksen zaten veri sınırlamasında tanımlanan en geniş ellipsoidin dışında kalmaktadır; dolayısıyla sinyal desteğinin içinde yer alacaktır.

3. BAŞARIM SONUÇLARI

Bu kısımda ellipsoid genişletme (EG) yöntemi, sıkıştırılmış algılama (CS) ve en küçük kareler (LS) yöntemi ile değişik durum ve kriterlerle karşılaştırılmıştır. Bunun için $N = 40$ boyutunda ve $K = 20$ seyreklik seviyesindeki rastgele ± 1 değerlerine sahip bir sinyal $M = 40 = N$ ölçüm kullanılarak test edilen yöntemlerle geri oluşturulmuştur. CS'in kısıtlı isometri özelliği [5, 9] sağlanması amacıyla A ölçüm matrisinin singular değerleri $(1 - \delta, 1 + \delta)$ arasında $\delta = 0.4$ olacak şekilde rastgele seçilmiştir. Bu durumda ölçümlere SNR değerleri $(-10, 20)$ dB arasında değişecek şekilde beyaz gauss gürültüsü (WGN) eklenmiştir. Her bir SNR değeri için yukarıda bahsedilen test prosedürü 100 kere rastgele sinyal, gürültü ve A matrisleri seçilerek tekrarlanmıştır. Şekil 2 (a) 100 denemenin kaçında oluşturulan sinyalin seyreklik seviyesinin gerçek seyreklik seviyesine göre küçük veya eşit olduğunu göstermektedir.

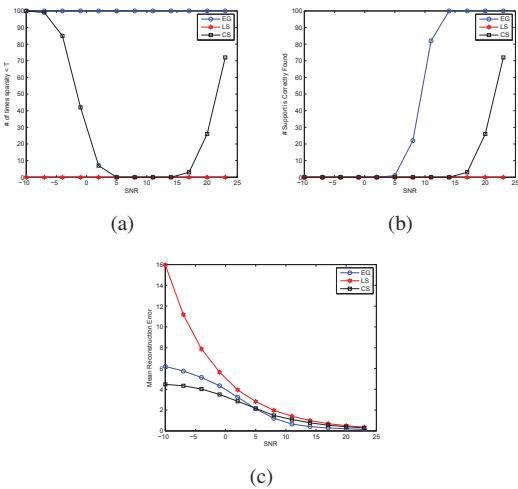


Figure 2: EG, LS ve CS metotları için (a) seyreklik seviyesinin doğru seviyeden küçük eşit olma sayısı, (b) doğru sinyal desteğini bulma sayısı, (c) ortalama geri oluşturma hatasının normu

Seyreklik seviyesinin belirlenmesi için oluşturulan $|\hat{x}| > \tau = 0.05$ kriteri kullanılmıştır. Bu durumda önerilen EG metodunun test edilen tüm SNR değerleri için oluşturduğu sinyalin seyrek olduğu gözlenmektedir. LS seyrek bir sinyal oluşturmadan seyrek bir sinyal oluşturması beklenen CS'in de bazı SNR değerlerinde doğru seyreklik seviyesinden fazla sinyal desteği oluşturduğu gözlenmektedir. Metotların bu denemelerde kaç kere sinyalin doğru desteği buldukları ise Şekil 2(b)'de sunulmuştur. Önerilen EG metodunun bu bakımdan da CS ve LS'e göre başarılı olduğu gözlenmektedir. EG yöntemi 5dB SNR değerinden sonra sinyal desteği tam olarak doğru bulmaya başlarken CS desteği doğru bulabilmek için 15dB SNR gerekmektedir. LS metodu ise sinyal支持力度ını denenen SNR değerlerinde doğru olarak bulamamaktadır. Oluşturulan sinyaller ile doğru sinyal arasındaki hatanın ℓ_2 normunun ortalaması ise Şekil 2(c)'de gösterilmektedir. Sinyal支持力度ının doğru olarak bulunduğu 5dB ve daha yüksek SNR değerlerinde EG'nin ortalama hatasının CS ve LS'e göre daha düşük olduğu

görülürken sinyal desteğinin tüm metotlar tarafından yanlış bulunduğu düşük SNR değerlerinde ise CS'in EG ve LS'e göre daha düşük ortalama geri oluşturma hatasına sahip olduğu görülmektedir.

3.1. EG Tablosu

EG metodu eksenlerin ellipsoidin sırayla ilk değiştiği eksen sıfırlama fikrini kullanan bir yöntemdir. Bu sıfırlama sırası $N!$ kombinasyonlardan bir tanesidir. Ellipsoid genişletmenin eksen sıralamasına olan ilişkisini incelemek ve farklı kriterlere göre çözüm üretebilecek Şekil 3'da gösterilen bir sonuç tablosu ortaya çıkarılmıştır.

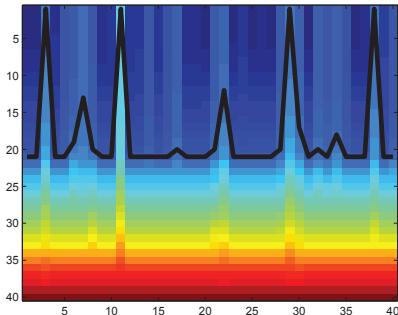


Figure 3: EG Tablosu ve veri sınırlaması

Tabloda satır boyunca aşağı inildikçe yeni bir eksen EG yöntemi kullanılarak sıfırlanmaktadır. Birinci satırda her bir sütun için sırasıyla $1, 2, \dots, N$ eksenleri sıfırlanmıştır. Tablodaki her bir hücre sıfırlanmayan eksenlerden oluşan desteği en küçük kareler uygulanarak elde edilen çözümleri barındırmaktadır. Şekil 3 bu şekilde elde edilen her bir çözüme karşılık gelen ℓ_2 norm hataları göstermektedir. Bu örnekte SNR 12 dB olarak kullanılmıştır. Şekil üzerindeki siyah çizgi ise veri sınırlaması tarafından belirlenen sınırı göstermektedir. Tablo veri sınırlamasını sağlayan çözümlerin içinden en seyrek olamı seçmek için veya herhangi bir seyreklik seviyesinde en küçük hatayı veren çözümü bulmak için rahatlıkla kullanılabilir. Bunun için N tane EG işlemi kadar hesaplama karmaşıklığı gerekmektedir.

3.2. Karşılaştırmalı Sonuçlar

Sıkıştırılmış algılama sonuçlarıyla önerilen ellips genişletme metodunu karşılaştırmak için bir benzetim çalışması yapılmıştır. $N = 40$ olduğu bir durumda her seferinde rastgele $K = 20$ seyreklik seviyesindeki ± 1 değerlerinden oluşan sinyaller $M = 40$ ölçüm alınarak değişik metotlarla geri oluşturulmuştur. Ölçümler $y = Ax + n$ şeklinde gürültülü doğrusal bir sistemle oluşturulmuştur. CS'in başarımı için gerekli özelliklerden biri olan kısıtlı isometri özelliğinin farklı δ değerlerinde $((1 - \delta)\|x\|_2 \leq \|x\|_2 \leq (1 + \delta)\|x\|_2)$ ve farklı SNR değerlerinde bağımsız 100 deneme gerçekleştirilmiştir. Sonuçlar Şekil 4'de gösterilmektedir.

Şekil 4 CS, ellips genişletme çözümleriyle ve EG tablosundan elde edilen en seyrek çözüm ve doğru seyreklikteki en düşük hata normuna sahip çözümleri karşılaştırmaktadır.

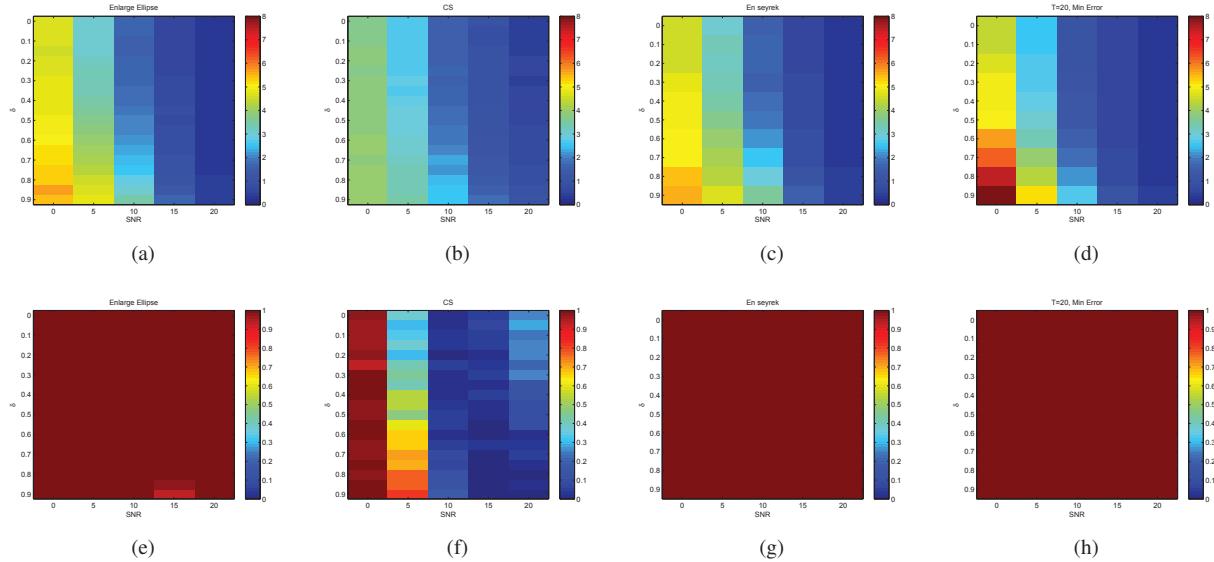


Figure 4: Sırasıyla EG,CS ve EG tablosundan elde edilen en seyrek ve doğru seyreklikteki en düşük hataya sahip çözümlerin a-d: ortalama geri oluşturma hataları, e-h: veri sınırlamasını sağlayan ve doğru seyreklikten küçük veya eşit seyrekliğe sahip çözümlerin oranı.

Şekil 4 a-d yöntemlerin farklı δ ve SNR değerlerindeki ortalama geri oluşturma hatalarını göstermektedir. Şekil 4 e-h ise yöntemlerin elde ettiği sonuçların hangi oranda hem verilen data sınırlamasına uyduğunu hem de oluşturulan sonucun seyreklik seviyesinin doğru seyreklik sayısından küçük veya eşit olduğuna bakmaktadır. Burda ellips genişletme tabanlı yöntemlerde destek kümesi tam olarak zaten verilirken CS sonucunun seyreklik seviyesini bulmak için çözümün mutlak değerinin 0.05 gibi bir eşikten yüksek olan eksenleri kullanılmıştır. Sonuçlar EG tabanlı yöntemlerin farklı SNR ve δ değerlerinde doğru seyreklik seviyesinden küçük veya ona eşit seyreklikte ve veri sınırlamasını sağlayan çözümler ürettiğini gösterirken CS sonucu gerçek seyreklikten daha yüksek sıfırdan farklı değerler içeren sonuçlar üretmektedir. Bu EG tabanlı yöntemlerin ℓ_0 norm sonucuna daha yakın sonuçlar ürttüğünü göstermektedir. Bunun yanında sadece EG'ye bakıldığından tablodan elde edilen sonuçlara göre özellikle ellipsin basıklığının yüksek olduğu yüksek δ değerlerinde çok az da olsa doğru seyreklik seviyesinden yüksek seyrekliğe sahip çözümlerin üretildiği görülmektedir. Bu bakımdan tablodan elde edilen en seyrek çözüm büyük bir fark olmamakla beraber sadece EG uygulamaya göre daha başarılı olduğu görülmektedir.

4. ÇIKARIMLAR

Bu çalışmada tam rank doğrusal bir denklem sistemi için seyrek x sinyallerini doğru olarak gerioluşturmaya yönelik önerilen yöntem kullanılan veri sınırını belirleyen $\|Ax - b\|_2 = \epsilon$ ellipsoidinin genişletilirken sırayla eksenlerin sıfırlanmasına dayanan yinelemeli bir metottur. Sonuçlar seyrek sinyal oluşturma alanında yinelemeli ve ℓ_1 norm minimizasyon tabanlı standard yöntemlere göre benzer problemlerde daha yüksek başarım elde ettiğini göstermektedir.

5. KAYNAKÇA

- [1] D. Takhar, J. N. Laska, M. B. Wakin, M. F. Duarte, D. Baron, S. Sarvotham, K. F. Kelly, and R. G. Baraniuk, “A new compressive imaging camera architecture using optical-domain compression,” in *Proc. Comp. Imaging IV at SPIE Electronic Imaging*, 2006.
- [2] R. Baraniuk and P. Steeghs, “Compressive radar imaging,” in *IEEE Radar Conf.*, 2007, pp. 128–133.
- [3] M. Lustig, D. Donoho, and J.M. Pauly, “Sparse MRI: The application of compressed sensing for rapid MR imaging,” *Magnetic Resonance in Medicine*, vol. 58, no. 6, pp. 1182–1195, Dec. 2007.
- [4] D.L. Donoho, “Compressed sensing,” *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306, 2006.
- [5] E. J. Candes, J. Romberg, and T. Tao, “Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information,” *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 52, pp. 489–509, 2006.
- [6] J. Tropp and A. Gilbert, “Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit,” *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 53, no. 12, pp. 4655–4666, Dec. 2007.
- [7] T. Blumensath and M. E. Davies, “Iterative hard thresholding for compressed sensing,” *preprint*, 2008.
- [8] D. Needell and J. A. Tropp, “Cosamp: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples,” *Appl. Comp. Harmonic Anal.*, *arXiv math.NA 0803.2392*, 2008.
- [9] R. Baraniuk, M. Davenport, R. DeVore, and M. Wakin, “A simple proof of the restricted isometry property for random matrices,” *Constructive Approximation*, vol. 28, no. 3, pp. 253–263, 2008.