

UYARLAMALI AĞLAR İÇİN ENTROPİ MINİMİZASYONUNA DAYALI GÜRBÜZ BİR ALGORİTMA

ENTROPY MINIMIZATION BASED ROBUST ALGORITHM FOR ADAPTIVE NETWORKS

Kivanc Kose, A. Enis Cetin

Osman Gunay

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Bilkent Üniversitesi
kkivanc,cetin@ee.bilkent.edu.tr

MIKES Mikrodalga Elektronik Sistemler Sanayi
ve Ticaret A.S., Akyurt 06750 - Ankara
osman.gunay@mikes.com.tr

ÖZETÇE

Bu makalede birden fazla boğumdan oluşan ağlarda boğumların dürtü tepkilerinin hesaplanması problemi ele alınmıştır. Boğumların birbirleriyle etkileşim içinde oldukları durumda kaynaşıma dayalı yöntemlerin boğumları tek tek ele almaktan daha efektif oldukları daha önceki çalışmalarda gösterilmiştir. Biz burada uyarlamalı filtreleme adımıyla bir yenilik olarak entropik fonksiyonla dayalı bir optimizasyon önermekteyiz. Bu yeni yöntemi Gauss ve ε -kirlenmiş gürültü altındaki sistemlerde test etmekteyiz. Sonuçlar göstermektedir ki önerilen yöntem epsilon-kirlenmiş gürültü altında uyarlamalı filtrenin hata seviyesinde iyileştirme sağlamaktadır.

ABSTRACT

In this paper, the problem of estimating the impulse responses of individual nodes in a network of nodes is dealt. It was shown by the previous work in literature that when the nodes can interact with each other, fusion based adaptive filtering approaches are more effective than handling nodes independently. Here we are proposing the use of entropy functional based optimization in the adaptive filtering stage. We tested the new method on networks under Gaussian and ε -contaminated Gaussian noise. The results show that the proposed method achieves significant improvements in the error rates in case of ε -contaminated noise.

1. GİRİŞ

Bu makalede bir ağ üzerinde bulunan boğumların dürtü tepkilerinin tahmin edilebilmesinde kullanılabilecek bir yöntem önermekteyiz. Ağ üzerindeki her boğumun dürtü tepkisini birbirlerinden bağımsız bir şekilde tek tek hesap etmek maliyetli bir yöntemdir. Bunun yerine Sayed [1]'de boğumların etkileşim içinde olup birbirlerinin davranışlarını etkileyebildiği, kooperatif çalışabilen bazı algoritmalar önermiş ve bunları birbirleriyle karşılaştırmıştır. [1]'de sunulan sonuçlar göstermektedir ki önerilen bu yöntemler, boğumları birbirlerinden bağımsız olarak tek tek ele almaktan daha iyi bir performans sağlamaktadır.

Biz burada, [1]'de verilen kooperatif algoritmaları daha hızlı yakınsamaya ve *epsilon-kirlenmiş* (ε -contaminated)

gürültü gibi durumlara karşı daha gürbüz yapmaya yönelik değişiklikler önermekteyiz. Bunu yaparken de yeni bir maliyet fonksiyoneli ve bu maliyet fonksiyoneli kullanan entropiye dayalı yeni bir izdüşüm operasyonu tanımlamaktayız.

Bu makalede ilk olarak [1]'de bahsi geçen algoritmalar üzerinden makale boyunca kullanacağımız notasyonu tanımlayacağız. Daha sonra yeni bir maliyet fonksiyonu olarak eksi sonsuzdan artı sonsuza kadar dışbükey olan entropiye dayalı yeni bir fonksiyoneli tanımlayıp bunu [1]'de bahsi geçen birden fazla boğum noktasından oluşan ağ topolojilerinin dürtü tepkilerinin kestiriminde kullanacağız. Makalenin sonunda da algoritmamızı Ref. [1]'de elde edilen sonuçlar ile karşılaştıracacağız.

2. PROBLEM FORMÜLASYONU VE NOTASYON

Farz edelim ki elimizde bir doğrusal bağlanım modeline göre ölçüm alabilen aynı h_s dürtü tepkisine sahip K tane boğum (örn. kablolu sensör ağı üzerindeki sensörler) bulunmaktadır. Bu boğumların t anında aldıkları ölçümler $d_i[t]$ şu şekilde ifade edilebilir;

$$d_i[t] = \sum_{k=0}^{M-1} h_s[k]u_i[t-k] + n_i[t], \quad i = 1, \dots, K \quad (1)$$

Burada $u_i[t]$, $n_i[t]$, i numaralı boğumun t anında sırasıyla girdi, ve gürültü işaretlerini ve h_s ise boğumların M uzunluğundaki dürtü tepkisini temsil etmektedir. Aynı sistemi ileride notasyonun daha kolay anlaşılması açısından vektörel olarak,

$$d_i[t] = \mathbf{h}_s \mathbf{u}'_{i,t} + n_i[t] \quad (2)$$

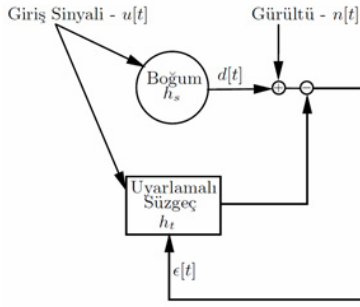
şeklinde de ifade edebiliriz.

Bu boğumların aynı ağ üzerinde bulunduğu fakat birbirleri ile etkileşim içinde olmadıkları durumlarda, her boğum için bağımsız olarak Şekil 1'de gösterilen uyarlamalı süzgeç içeren modeli kullanarak, boğumların dürtü modellerini tahmin edip, gürültüden daha az etkilenen bir çıkış işareti elde etmek mümkündür. LMS algoritması bu amaçla literatürde sıklıkla kullanılır [2, 3].

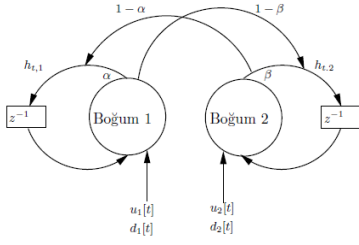
LMS algoritması, M uzunluğunda rastgele bir başlangıç süzgeci $\mathbf{h}_o$ belirleyerek başlar. Bu süzgecin t anındaki kat-sayılarını hata sinyali ϵ_t ve giriş sinyalinin t anından itibaren

Bu çalışma TÜBİTAK tarafından 111E057 projesi kapsamında desteklenmektedir.

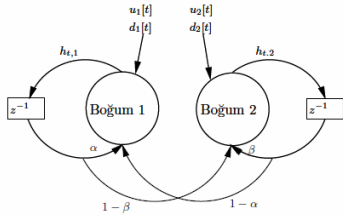
978-1-4673-0056-8/12/\$26.00 ©2012 IEEE



Şekil 1: Tek boğum için uyarlamalı süzgeçleme modeli.



(a) ATC yönteminin diyagramı



(b) CTA yönteminin diyagramı

Şekil 2: ATC ve CTA yöntemlerinin iki boğumlu sistem üzerinde gösterimi [1].

M birim geriye dönük örneğinden oluşan $\mathbf{u}_t$ vektörünü kullanarak döngülü olarak şu şekilde günceller:

$$\mathbf{h}_{t+1} = \mathbf{h}_t + \mu \epsilon_t \mathbf{u}_t, \quad \mathbf{u}_t = [u[t], \dots, u[t - M + 1]]. \quad (3)$$

Burada μ öğrenme katsayısı ve ϵ_t 'de t anında uyarlamalı süzgeç tahmininin hata sinyali olup,

$$\epsilon_t = d[t] - \tilde{d}[t] = d[t] - \mathbf{h}_t \mathbf{u}_t' \quad (4)$$

şeklinde hesaplanır [4, 5]. LMS algoritması aslında her adımda hatanın karesini en küçültmeye çalışmaktadır. Düzgelenmiş LMS (NLMS) algoritması (3)'de verilen formülasyonda $\mu = \frac{1}{\|\mathbf{u}_t\|^2}$ olduğu durumda sistem aslında;

$$\min_{\mathbf{h}_t} \|\epsilon_t\|_2 \quad \text{öyle ki} \quad d[t] = \mathbf{h}_t \mathbf{u}_t', \quad t = 0, 1, \dots \quad (5)$$

şeklinde yazılabilecek olan üstün yüzeylere dik izdüşüm problemi çözülmektedir [6]. LMS algoritması sayesinde iteratif olarak güncellenen süzgeç katsayıları bir adım sonraki adımda oluşacak çıkış işaretinin tahmin edilmesinde kullanılır.

Ağ üzerindeki boğumların birbirleri ile etkileşebildikleri

durumda ise, her boğum için Şekil 1'de verilen modeli kullanarak LMS algoritmasını kullanmanın en iyi ve en hızlı sonucu vermediği [1]'de gösterilmiştir. Sayed [1]'de 4 farklı etkileşim modeli önermiş ve bunları karşılaştırarak performanslarını sunmuştur. Önerilen bu modellerden en başarılı olanları sırasıyla Şekil 2(a) ve 2(b)'te gösterilen *uyarla ve birleştir* (*adapt and combine - ATC*) ve *birleştir ve uyarla* (*combine and adapt - CTA*) yöntemleridir. Sistemlerin dürtü tepkilerini ayrı ayrı bulmak yerine, ATC ve CTA yöntemlerinde anlık dürtü tepkilerinin hesaplanması sırasında boğumların birbirlerini etkilemelerine izin verilmiştir. Mesela ATC yönteminin iki boğumlu bir sisteme uygulanması durumunda güncelleme adımları

$$\text{Boğum 1 : } \begin{cases} \phi_{1,t} = h_{1,t-1} + \mu \epsilon_{1,t} \mathbf{u}_{1,t} \\ \mathbf{h}_{1,t} = \alpha \phi_{1,t} + (1 - \alpha) \phi_{2,t} \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{Boğum 2 : } \begin{cases} \phi_{2,t} = \mathbf{h}_{2,t-1} + \mu \epsilon_{2,t} \mathbf{u}_{2,t} \\ \mathbf{h}_{2,t} = \alpha \phi_{2,t} + (1 - \alpha) \phi_{1,t} \end{cases} \quad (7)$$

şeklinde olmaktadır. CTA methodunda ise bu güncelleme adımları

$$\text{Boğum 1 : } \begin{cases} \phi_{1,t-1} = \alpha \mathbf{h}_{1,t-1} + (1 - \alpha) \mathbf{h}_{2,t-1} \\ \mathbf{h}_{1,t} = \phi_{1,t-1} + \mu \epsilon_{1,t} \mathbf{u}_{1,t} \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{Boğum 2 : } \begin{cases} \phi_{2,t-1} = \beta \mathbf{h}_{2,t-1} + (1 - \beta) \mathbf{h}_{1,t-1} \\ \mathbf{h}_{2,t} = \phi_{2,t-1} + \mu \epsilon_{2,t} \mathbf{u}_{2,t} \end{cases} \quad (9)$$

şeklinde dir. (6)-(9)'da verilen ATC ve CTA algoritmalarının uyarlama adımlarında da LMS algoritması kullanılmaktadır.

3. ENTROPİK FONKSİYONEL VE D-İZDÜŞÜMÜ

ℓ_1 optimizasyonu bir çok durumda ℓ_2 optimizasyonuna göre daha gürbüzdür. Fakat ℓ_1 optimizasyon problemlerinin çözümünde dışbükey optimizasyon yöntemleri kullanılamaz. Entropi fonksiyonu $g(x) = -x \log x$ sinyal ve resim işleme konularında başta Bregman [7] olmak üzere bir çok araştırmacı tarafından ℓ_1 optimizasyonunu yakınsamak ve doğrusal programlama problemlerinin çözümünde kullanılmıştır [8, 9, 10, 11, 12]. Biz burada entropik fonksiyonel olarak isimlendirdiğimiz ve orijinal entropi fonksiyonunun kaydırılıp, simetrik hale getirilmiş versiyonu olan

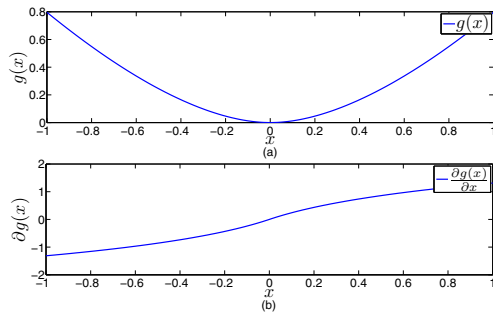
$$g(\mathbf{h}) = \sum_n (|\mathbf{h}[n]| + \frac{1}{e}) \ln(|\mathbf{h}[n]| + \frac{1}{e}) + \frac{1}{e}, \quad (10)$$

fonksiyoneli 3.1. bölümde tanımlayacağımız optimizasyon problemlerinde maliyet fonksiyonu olarak kullanacağız. Şunu da eklemeyi unutmam ki, logaritmanın tabanı değiştirilerek daha farklı fonksiyoneller üretmek mümkündür.

Bregman [7]'da, maliyet hesabında dışbükey ve sürekli türevlenebilir fonksiyonları kullanan optimizasyon problemlerinin döngülü olarak çözülmesine olanak sağlayan D-izdüşümü kavramını literatüre kazandırmıştır. D-izdüşümü operasyonunda maliyet fonksiyonu,

$$D(\mathbf{h}_p, \mathbf{h}_o) = g(\mathbf{h}_o) - g(\mathbf{h}_p) - \langle \nabla g(\mathbf{h}_p), \mathbf{h}_o - \mathbf{h}_p \rangle \quad (11)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\mathbf{h}_o$ bir başlangıç vektörü ve $\mathbf{h}_p$ ise $\mathbf{h}_o$ 'yu maliyet fonksiyonuna göre en küçükleyen ve (1)'de verilen gibi bir üstünyüzeyde bulunan D-izdüşümü vektörüdür. Eğer



Şekil 3: Bir boyutlu entropik fonksiyonel (a) eğrisi ve (b) türevi.

Tablo 1: Simulasyonda kullanılan test ağlarının parametreleri.

M	μ	$\sigma_{d,1}^2$	$\sigma_{d,2}^2$	σ_u^2	α, β	İterasyon Sayısı	Deneme Sayısı
10	0.005	0.5	-	1	-	2000	1000
10	0.005	0.5	0.3	1	0.7	2000	1000

$g(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|^2$ şeklinde ise maliyet fonksiyonu $D(\mathbf{h}_p - \mathbf{h}_o) = \|\mathbf{h}_p - \mathbf{h}_o\|^2$ olup, dik izdüşüme denk gelir.

Şekil 3'de de görüldüğü üzere tanımladığımız bu fonksiyonel dışbükey ve sürekli türevlenebilir bir fonksiyondur. Uzaklık hesabında kullanılan maliyet fonksiyonunun dışbükey ve sürekli türevlenebilir olması halinde, D-izdüşümü operasyonları iteratif bir şekilde uygulanarak dışbükey optimizasyon problemleri çözülebilmektedir [7, 13, 14, 6]. Biz de 3.1. bölümde D-izdüşüm operasyonlarını kullanarak ATC ve CTA metodlarının yakınsama hızını arttırabilen ve ε -kirlenmiş gürültüye karşı daha gürbüz hale getiren bir uyarlamalı filtreleme metodu sunuyoruz.

3.1. UYARLAMALI ALGORİTMA

Yukarıda belirtildiği üzere (5)'de verilen optimizasyon problemi (10). denklem'de tanımladığımız entropik fonksiyoneli maliyet fonksiyonu olarak kullanarak çözülebilir. Bu durumda (5)'de verilen optimizasyon problemini yeniden

$$\min_{\mathbf{h}_{i,t}} D(\mathbf{h}_{i,t}, \mathbf{h}_o) \quad \text{öyle ki} \quad d_i[t] = \mathbf{h}_{i,t} \mathbf{u}'_{i,t} \quad (12)$$

şeklinde formüle etmekteyiz.

Diyelim ki, $\mathbf{h}_{i,0}$ rastgele bir başlangıç süzgeci olsun. $\mathbf{h}_{i,0}$ filteresinin D-İzdüşümü olan $\mathbf{h}_{i,1}$ katsayı vektörü,

$$\text{sgn}(\mathbf{h}_{i,1}) \cdot \ln(|\mathbf{h}_{i,1}| + \frac{1}{e}) = \text{sgn}(\mathbf{h}_{i,0}) \cdot \ln(|\mathbf{h}_{i,0}| + \frac{1}{e}) + \lambda \mathbf{u}_{i,0} \quad (13)$$

ve

$$d_i[t] = \mathbf{h}_{i,t} \mathbf{u}'_{i,t} \quad (14)$$

beraber çözülerek hesaplanabilir. Daha sonra bu yeni filtre katsayıları kullanılarak bir sonraki sistem çıktısı tahmini hesaplanır ve algoritma döngülü olarak devam eder. Adımlar sırasında kullanılan kısıtlama kümelerinin içbükey olması dolayısıyla, POCS (Projection onto convex sets) teorisine göre iteratif izdüşümler sayesinde bulunan filtre katsayıları, sistemin gerçek tepki katsayılarına yakınsar [13, 6].

Yukarıda verilen adımlar her boğumun bağımsız olarak ele alındığı durumda, Algoritma 1'deki gibi uygulanabilir. Algoritma 1'de bahsi geçen *e-İzdüşümü* operasyonu denklem (12)'de anlatılan optimizasyon probleminin çözümüdür. Ağ üzerindeki boğumların etkileşim içinde oldukları durumda kullanılabilecek

Algoritma 1 E-İzdüşümü kullanılan uyarlamalı süzgeçleme algoritmasının sözde programı

Öncülleme: Rastgele bir h_o ve δ

while $\exists d_1[t], u_1[t] \in \mathbb{R}$

$$\theta_{1,t} = \text{E-İzdüşümü}(\mathbf{h}_{1,t}, d_1[t] = \mathbf{h}_{1,t} \mathbf{u}'_{1,t})$$

$$\mathbf{h}_{1,t+1} = (1 - \delta)\mathbf{h}_{1,t} + \delta\theta_{1,t}$$

end

Algoritma 2 E-İzdüşümü kullanarak 2 boğumlu sistemde ATC uyarlamalı süzgeçleme algoritmasının sözde programı

Öncülleme: Rastgele bir $h_o, \alpha, \text{KorNodes}$

while $\exists d_1[t], u_1[t], d_2[t], u_2[t] \in \mathbb{R}$

for $i = 1, 2$

$$\theta_{i,t} = \text{E-İzdüşümü}(\mathbf{h}_{i,t}, d[t] = \mathbf{h}_{i,t} \mathbf{u}'_{i,t})$$

$$\phi_{i,t} = (1 - \delta)\mathbf{h}_{i,t} + \delta\theta_{i,t}$$

end

$$\mathbf{h}_{1,t+1} = (\alpha)\theta_{1,t} + (1 - \alpha)\theta_{2,t}$$

$$\mathbf{h}_{2,t+1} = (\beta)\theta_{2,t} + (1 - \beta)\theta_{1,t}$$

end

olan adımlar ise Algoritma 2 de verilmektedir.

4. SONUÇLAR

İki farklı ağ kullanarak Algoritma 1 ve 2'yi test edip, [1]'da sunulan sonuçlarla karşılaştırmaktayız. Bunlardan ilki tek boğumlu bir sistemin dürtü tepkisinin hesaplanması, diğeri ise iki boğumdan oluşan sistemin dürtü tepkisinin (6) ve (7)'de verilen ATC yöntemi kullanılarak hesaplanmasıdır. Ağ parametreleri tablo 1'de verilmektedir.

Önerdiğimiz, entropik fonksiyoneli kullanan uyarlamalı süzgeçleme yöntemi ile [1]'de önerilen yöntemlerin performans karşılaştırmasını,

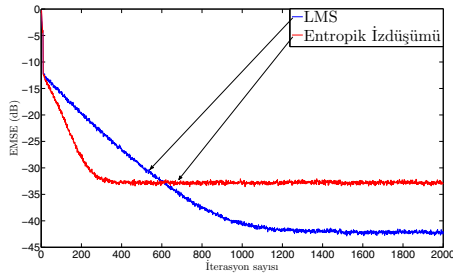
$$EMSE_i \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} E|\mathbf{u}_i[t](\mathbf{h}_o - \mathbf{h}_{i,t-1})|^2 \quad (15)$$

şeklinde tanımlanan *artık ortalama kare hata (excess mean square error - EMSE)* ölçevi üzerinde yapmaktayız. Testlerde iki farklı gürültü modeli kullandık. Bunlardan ilki [1] makalesinde de kullanılan sıfır ortalama $\sigma_{d,i}^2$ değişintili Gauss dağılımlı beyaz gürültüdür ($N_{\sigma_{d,i}}$). Diğeri ise ε -kirlenmiş gauss dağılımlı beyaz gürültü ($\bar{N}_{\sigma_{d,i}}$) olup, değişintileri $\sigma_{d,i}^2$ ve $\gamma\sigma_{d,i}^2$ olan iki Gauss dağılımlı beyaz gürültünün birleşiminden

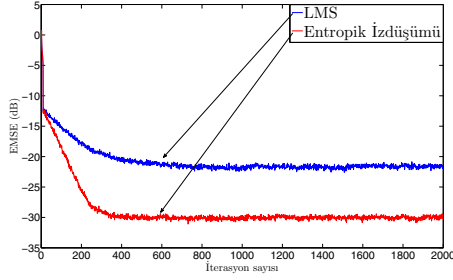
$$\bar{N}_{\sigma_{d,i}} = (1 - \varepsilon)N_{\sigma_{d,i}} + \varepsilon N_{\gamma\sigma_{d,i}} \quad (16)$$

şeklinde oluşmaktadır. Burada $\varepsilon \ll 1$ ve $\gamma \gg 1$ şeklinde seçilen iki sabit olup, testlerde $\varepsilon = 0.01$ ve $G = 10000$ olarak seçilmiştir.

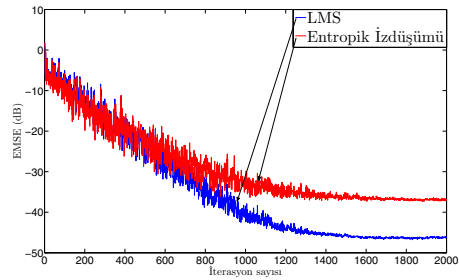
İlk olarak LMS ve önerilen yöntemleri Tablo 1'de verilen parametreleri kullanarak tek boğumlu ağ üzerinde karşılaştırıp, Şekil 4'de sunulan sonuçları elde ettik. Şekil 4(a)'da da görüldüğü üzere, önerilen yöntem Gauss gürültüsü olan durumlarda LMS kadar iyi bir EMSE hata seviyesine erişememektedir. Fakat E-izdüşümü ℓ_1 optimizasyonuna yakınsandığından dolayı daha gürbüz sonuçlar vermektedir. Şekil 4(b)'da da görüldüğü üzere, çıkış sinyalinde ε -kirlenmiş gürültünün bulunduğu durumlarda önerilen yöntem LMS'e göre daha başarılı olmuştur.



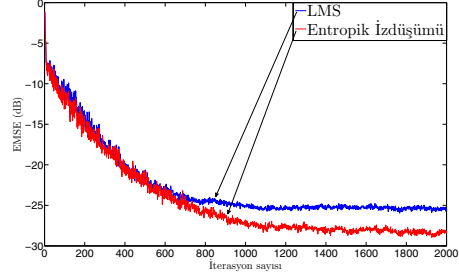
(a) Tek boğumlu ağda, $\sigma_{v,i}$ 'in Gaussian gürültü olduğu durumda EMSE'nin döngüler sırasındaki değişimi



(b) Tek boğumlu ağda, $\sigma_{v,i}$ 'in epsilon-kirilenmiş Gaussian gürültü olduğu durumda EMSE'nin döngüler sırasındaki değişimi



(a) İki boğumlu ağda, $\sigma_{v,i}$ 'in Gaussian gürültü olduğu durumda EMSE'nin döngüler sırasındaki değişimi



(b) İki boğumlu ağda, $\sigma_{v,i}$ 'in epsilon-kirilenmiş Gaussian gürültü olduğu durumda EMSE'nin döngülere sırasındaki değişimi

Şekil 4: Tek boğumlu ağ için yapılan simülasyonların sonucu

Tablo 1'de verilen parametreleri kullanarak, LMS ve önerilen algoritmaları iki boğumlu ağ üzerinde ATC yöntemini kullanarak test ettik. Şekil 5'de de görüldüğü üzere önerilen algoritmanın birden fazla boğum bulunduran ağlarda kullanılması durumunda da tek boğumlu ağlara benzer şekilde daha gürbüz sonuçlar elde edilmektedir.

5. VARGILAR

Bu makalede bir veya birden fazla boğuma sahip ağların dürtü tepkilerini öngörmek ve boğum çıktılarını gürültüden daha az etkilenir hale getirmek amacıyla kullanılabilecek bir uyarlamalı süzgeçleme algoritması önerilmiştir. Önerilen algoritmanın Gauss gürültü karşısındaki başarımlı seviyesi LMS algoritması kadar iyi değildir. Fakat önerilen algoritma ℓ_1 optimizasyonuna yakınsaması sayesinde ϵ -kirlenmiş, kuyruğu kalın (heavy-tailed) türde, algoritma gürbüzlüğü daha çok sınavan durumlardan, LMS'e kıyasla daha az etkilenmekte ve daha yüksek başarımlı sağlamaktadır.

6. KAYNAKÇA

- [1] Xiaochuan Zhao and Ali H. Sayed, "Performance limits of lms-based adaptive networks," in *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, IEEE, May 2011, pp. 3768–3771.
- [2] Monson H. Hayes, *Statistical Digital Signal Processing and Modeling*, Wiley, 1996.
- [3] Ali H. Sayed, *Adaptive Filters*, John Wiley & Sons, 2008.
- [4] N Bershad, "Analysis of the normalized lms algorithm with gaussian inputs," *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, vol. 34, no. 4, pp. 793–806, 1986.
- [5] A. Weiss and D. Mitra, "Digital adaptive filters: Conditions for convergence, rates of convergence, effects of noise

Şekil 5: İki boğumlu ağ için yapılan simülasyonların sonucu

and errors arising from the implementation," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 25, no. 6, pp. 637–652, Nov 1979.

- [6] K. Slavakis S. Theodoridis and I. Yamada, "Adaptive learning in a world of projections," *Signal Processing Magazine, IEEE*, vol. 28, no. 1, pp. 97–123, Jan 2011.
- [7] L. M. Bregman, "The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming," *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, vol. 7, pp. 200–217, 1967.
- [8] G. T. Herman, "Image reconstruction from projections," *Real-Time Imaging*, vol. 1, no. 1, pp. 3–18, 1995.
- [9] Censor and A. Lent, "An iterative row-action method for interval convex programming," *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 34, no. 3, pp. 321–353, 1981.
- [10] H. Tuy Lent, "An iterative method for the extrapolation of band-limited functions," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 83 (2), pp.1981, pp. 554–565, 1981.
- [11] A. E. Çetin, "An iterative algorithm for signal reconstruction from bispectrum," in *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1991, vol. 39, pp. 2621–2628.
- [12] A. E. Çetin and R. Ansari, "Convolution-based framework for signal recovery and applications," in *Journal of the Optical Society of America*, 1988, vol. 5, pp. 1193–1200.
- [13] D. C. Youla and H. Webb, "Image restoration by the method of convex projections, part i-theory," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. MI-I-2, pp. 81–94, 1982.
- [14] C. Pinar and S. A. Zenios, "An entropic approximation of ℓ_1 penalty function," in *Transactions on Operational Research*, 1995, pp. 101–120.