Doğrusal Denklem Sistemleri için Yeni Bir Yöntem ve Kanal Eşitlemeye Uygulanması
A Novel Technique for a Linear System of Equations Applied to Channel Equalization

Mert Pilancı[1], *Orhan Arıkan*[1], *Barlas Oğuz*[2], *Mustafa Ç. Pınar*[3]

[1] Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü Bilkent Üniversitesi, Ankara
[2] Elektrik Mühendisliği ve Bilgisayar Bilimleri California Üniversitesi, Berkeley, ABD
[3] Endüstri Mühendisliği Bölümü Bilkent Üniversitesi, Ankara

{pilanci,oarikan}@ee.bilkent.edu.tr

Özetçe

Sinyal işlemede bir çok ters problem doğrusal denklem sistemlerine dönüşmektedir. Ölçüm vektöründeki hataların yanı sıra katsayı matrisinin de hata içermesi sayısal olarak kararlı ve isabetli bir çözüm üretmeyi zorlaştırmaktadır. Bu bildiride denklem sisteminin problemden kaynaklanan özel yapısını (Toeplitz, Hankel, vs.) ve sistemdeki olası belirsizlikleri dikkate alan gürbüz bir çözüm yöntemi önerilmekte ve sayısal bir algoritma sunulmaktadır. Önerilen yöntem ve bilinen diğer yöntemler iletişimde temel bir gereksinim olan kanal eşitlemeye uygulanmış ve başarım artışı sayısal örneklerle gösterilmiştir.

Abstract

In many inverse problems of signal processing the problem reduces to a linear system of equations. Accurate and robust estimation of the solution with errors in both measurement vector and coefficient matrix is a challenging task. In this paper a novel formulation is proposed which takes into account the structure (e.g. Toeplitz, Hankel) and uncertainties of the system. A numerical algorithm is provided to obtain the solution. The proposed technique and other methods are compared in a channel equalization example which is a fundamental necessity in communication.

1. Giriş

Sinyal işlemenin frekans kestirimi, gözü kapalı ters evrişim ve sistem tanımlama gibi bir çok probleminde ölçüm değerlerini içeren vektör $\mathbf{y}$ ve kestirilmek istenen parametre vektörü $\mathbf{x}$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}, \mathbf{A} \in \mathbf{R^{m\times n}}, \mathbf{x} \in \mathbf{R^n}, \mathbf{y} \in \mathbf{R^m}$$

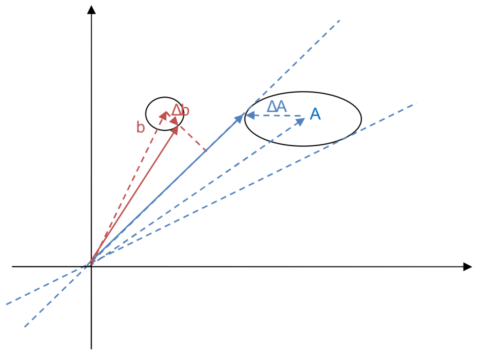
gibi bir doğrusal bir modelle gösterilebilir. Bilinmeyen parametre $\mathbf{x}$ in kestirimi $\hat{\mathbf{x}}$ için bilinen bir çok yöntem bulunmaktadır. $\mathbf{x}$ birinci ve ikinci derece istatistikleri bilinen bir rastgele değişken ve $\mathbf{A}$ matrisi gürültüsüz olarak bilinmekte ise Wiener süzgeci parametre kestirim hata karelerinin beklenen değeri olan $E[||\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}||_2^2]$'yi bütün doğrusal kestirimciler üzerinden minimize eder. $\mathbf{x}$ parametrisiyle ilgili istatistik bulunmamakta veya modeli tanımlayan $\mathbf{A}$ matrisi gürültü ya da belirsizlik içeriyorsa, $\mathbf{x}$ deterministik ve bilinmeyen bir parametre kabul edilerek çeşitli En Küçük Kareler (Least Squares) yöntemleri sıklıkla uygulanır.

Ölçüm sayısının bilinmeyen sayısından fazla olduğu durumda ($m > n$) bu denklem sistemi ölçüm hataları nedeniyle genelde tutarsızdır ve $\mathbf{A}$ matrisi tam olarak biliniyorsa basit En Küçük Kareler yöntemiyle doğrusal modele en iyi uyan çözüme ulaşılabilir. Fakat çoğu uygulamada $\mathbf{A}$ matrisinin elemanlarında gürültü ya da parametrik bir belirsizlik vardır. Bu durumda Toplam En Küçük Kareler yöntemi (Total Least Squares) $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{y}$ de bulunan hataları birlikte değerlendirip modele en iyi uyan $\mathbf{x}$'i bularak daha isabetli bir çözüme ulaşır fakat daha sonra ilgili bölümde gösterileceği gibi çözümün gürültüye hassaslığı artar [2].

Sinyal işlemede bir çok uygulamada $\mathbf{A}$ matrisinin problemin doğasından gelen bir yapısı vardır. Örneğin evrişim işlevi yapan Toeplitz $\mathbf{A}$ matrisinin köşegenleri aynı değere sahiptir. Matristeki gürültü ve belirsizlik de bu yapıya uymak zorunda olduğundan Toplam En Küçük Kareler yöntemi gözü kapalı ters evrişim ve sistem tanımlama gibi problemlere uygulandığında matristeki bu yapıyı dikkate almadığından başarım oranı düşüktür. Bu şekildeki matrisler için Yapısal Toplam En Küçük Kareler (Structured Total Least Squares) yöntemleri geliştirilmiştir [3]. $\mathbf{A}$ matrisi yapılı ve elemanları normal dağılıma sahipse ve ölçüm hataları da eşit varyansla normal dağılmışsa, $\mathbf{x}$ deterministik bilinmeyen parametresinin En Büyük Olabilirlik (EBO) kestirimi STLS yöntemiyle bulunur. STLS yönteminin bu istatistiksel üstünlüğü son 15 yılda bir çok sinyal işleme araştırmacısının çeşitli problemlere bu yöntemi uygulamasını sağlamıştır. Görüntü işlemede bulanıklığın giderilmesi [5], dizilim sinyal işlemede armonik üst-çözünürlük [6], Çok Girişli Çok Çıkışlı (MIMO) iletişim sistemlerinde kanal parametre kestirimi [7], sinyallerin sönümlü sinüs modellenmesi [8], güç spektrumu kestirimi [9], radar saçınım merkezlerinin kestirimi [10] gibi farklı alanlarda bir çok uygulamada STLS yöntemi uygulanmıştır.

STLS yönteminin gürültüye hassaslığının TLS'den daha fazla olduğu [11]'de bulunan bir çok matris için yapısal durum numarasının (structured condition number) yapısız durum numarasından küçük olması ispatıyla kolayca gösterilebilir.

978-1-4244-4436-6/09/$25.00 ©2009 IEEE



Şekil 1: Yapısız matrisler için problem geometrisi

Bu problemi gidermek için STLS yöntemine bir Tikhonov regülarizasyon terimi de eklenebilir [5]. Fakat gürültüye hassaslığın asıl nedeni bir sonraki bölümde gösterileceği gibi $\mathbf{A}$ matrisi üzerinde tutarlılık nedeniyle bulunan düzeltmedir. Bu bildiride önerilen yöntem STLS tipi bir yaklaşımdaki tutarlılık gerekliliğini kaldırarak daha başarılı ve gürbüz kestirim yapabilmektedir. Önerilen yöntem için hızlı bir algoritma geliştirilmiş ve kanal eşitleme uygulamasında başarımı sayısal olarak gösterilmiştir.

2. En Küçük Kareler Yöntemi (LS) ve Tikhonov Regülarizasyonu

$\mathbf{Ax} \approx \mathbf{y}$ ölçüm hatalarının yalnızca $\mathbf{y}$ vektöründe olduğu tutarsız bir denklem sistemi ise Gauss-Markov teoremine göre deterministik bilinmeyen $\mathbf{x}$'in normal ölçüm hataları altında EBO kestirimi asagidaki optimizasyon problemi ile bulunur,

$$\arg\min_{\mathbf{x}} ||\mathbf{Ax}-\mathbf{y}||_2 = (\mathbf{A^T A})^{-1}\mathbf{A^T y}$$

Çoğu uygulamada $\mathbf{A}$ matrisinin durum numarası yuksektir ve $\mathbf{A^T A}$ nın tersinmesi nedeniyle LS yöntemi gürültüye fazla hassastır. Bu hassasiyet kabul edilemeyecek kadar büyük $\hat{\mathbf{x}}$ kestirimlerine neden olur. Tikhonov regülarizasyonu bunu önlemek amacıyla $\mathbf{x}$'in büyük değerlerine bir ceza terimi ekler,

$$\arg\min_{\mathbf{x}} ||\mathbf{Ax}-\mathbf{y}||_2 + \lambda\,||\mathbf{x}||_2 = (\mathbf{A^T A}+\lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{A^T y}$$

$\mathbf{x}$'in ve gürültünün stokastik ve normal dagılımlı oldugu varsayımında da Wiener süzgeci çıkışı ayni ifadeyle verilir.

3. Toplam En Küçük Kareler Yöntemi (TLS) ve Yapısal Toplam En Küçük Kareler Yöntemi (STLS)

$\mathbf{Ax} \approx \mathbf{y}$ tutarsız bir denklem sistemi ise TLS yöntemi gözlenen $[\mathbf{A}\ \mathbf{b}]$ matrisine minimum Frobenius norm $[\mathbf{\Delta A}\ \mathbf{\Delta y}]$ düzeltmesi yaparak tutarlı bir $(\mathbf{A}+\mathbf{\Delta A})\mathbf{x} = (\mathbf{y}+\mathbf{\Delta y})$ sistemi oluşturur. TLS çözümü Tekil Değer Ayrışımı (SVD) kullanılarak aşağıdaki gibi bulunabilir [2]:

$$\mathbf{x}_{TLS} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} - \sigma^{\mathbf{2}}_{\mathbf{n+1}}\mathbf{I})^{-\mathbf{1}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}\ ,$$

σ_{n+1}, $[\mathbf{A}\ \mathbf{y}]$ matrisinin en küçük tekil değeridir. Tikhonov regülarizasyonu ile karşılaştırıldığında TLS in gürültüye hassaslığının LS yönteminden bile daha fazla olduğu görülür [13]. STLS yöntemi duzeltme terimlerini matristeki yapıyı koruyarak aşağıdaki gibi bulmaya çalışır.

$$\min_{\mathbf{\Delta A},\mathbf{\Delta y},\mathbf{x}} ||\mathbf{\Delta A}\ \mathbf{\Delta y}||_F,$$
$$s.t.\ (\mathbf{A}+\mathbf{\Delta A})\mathbf{x} = (\mathbf{y}+\mathbf{\Delta y})\ \text{ ve}$$
$$[\mathbf{\Delta A}\ \mathbf{\Delta y}] \text{ aynı yapıdadır } [\mathbf{A}\ \mathbf{y}]\ .$$

STLS problemi konveks olmadığından Newton metodu gibi yerel yöntemlerle çözülür [6].

4. Oyun Kuramsal Yöntemler

Sistemdeki belirsizlik ya da gürültü üzerinde sınırlar biliniyor ya da tahmin ediliyorsa, bu sınırlar icerisinde en kötü performansı en iyi olan kestirici aşağıdaki gibi bulunur

$$\min_{\mathbf{x}} \max_{[\mathbf{\Delta A \Delta y}]_\mathbf{F} \le \epsilon} ||(\mathbf{A}+\mathbf{\Delta A})\mathbf{x} - (\mathbf{y}+\mathbf{\Delta y})||_2$$

Bu formülasyon gizli konveksite kullanılarak Yarı-Belirli Programlama (Semidefinite Programming) ile etkili biçimde çözülebilir [4] ve min-max olarak bilinir. Bu yaklaşımın dezavantajı fazla muhafazakar çözümler üretip başarım oranının düşük olmasıdır.

Başka bir yaklaşım ise belirsizlik sınırları içerisinde en iyi performansı en iyi olan kestiriciyi bulmaktır [16],

$$\min_{\mathbf{x}} \min_{[\mathbf{\Delta A \Delta y}]_\mathbf{F} \le \epsilon} ||(\mathbf{A}+\mathbf{\Delta A})\mathbf{x} - (\mathbf{y}+\mathbf{\Delta y})||_2$$

Min-min olarak bilinen bu yöntem daha isabetli fakat gürültüye daha hassastır. Yapısız matrisler için bu problemin çözümü [16]'da verilmiştir. 2×1 lik vektörler için geometrik yorum Şekil 1'de gösterilmektedir. Min-min yöntemi verilen sınırlar içerisinde $\mathbf{y}$'yi $\mathbf{A}$'nın değer uzayına yaklaştırıp değer uzayının tümleyenine olan yansımasını en aza indirmektedir.

5. Önerilen Yöntem

Denklem sistemindeki yapılı belirsizlik $\alpha = [\alpha_1 ... \alpha_N]^T$ vektörü ile aşağıdaki gibi parametrize edildiğinde,

$$\mathbf{A}(\alpha) = \mathbf{A} + \textstyle\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \alpha_\mathbf{i}\mathbf{A_i},\ \mathbf{y}(\alpha) = \mathbf{y} + \textstyle\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \alpha_\mathbf{i}\mathbf{y_i}$$

ve belirsizlik sınırları $\mathbf{W}$ ağırlık matrisiyle $||\mathbf{W}\alpha||_2 \le \epsilon$ olarak verildiğinde bu sınırlar içerisinde en iyi performansı en iyi olan oyun kuramsal kestirici aşağıdaki eniyileme ile tanımlanabilir,

$$\min_{\mathbf{x}} \min_{||\mathbf{W}\alpha||_2 \le \epsilon} \left|\left|(\mathbf{A} + \textstyle\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \alpha_\mathbf{i}\mathbf{A_i})\mathbf{x} - (\mathbf{y} + \textstyle\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \alpha_\mathbf{i}\mathbf{y_i})\right|\right|_2 \quad (1)$$

Bu bildiride $\mathbf{y}$ vektöründe belirsizlik olmadığı $\mathbf{y}(\alpha) = \mathbf{y}$ özel durumu için yeni bir algoritma ve uygulaması sunulacaktır. $\mathbf{y}$'de belirsizlik içeren durum [1]'de incelenmiştir. Sabit bir $\mathbf{x}$ vektörü için, $\mathbf{a_i} = \mathbf{A_i x}$ ve $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = [\mathbf{a_1} ... \mathbf{a_N}]$ olarak tanımlandığında maliyet fonksiyonu aşağıdaki hale gelir,

$$||\mathbf{A}(\alpha)\mathbf{x} - \mathbf{y}||_2 = ||\mathbf{Ax} + \mathbf{U}(\mathbf{x})\alpha - \mathbf{y}||_2$$

Bu fonksiyon $(\mathbf{x}', \alpha')$ noktasında ikinci derece terimler ihmal edilerek doğrusallaştırılırsa $(\mathbf{x}' + \mathbf{\Delta x}, \alpha' + \mathbf{\Delta}\alpha)$ noktasındaki değeri aşağıdaki gibi yazılabilir [17].

$$||(\mathbf{A}(\alpha'+\boldsymbol{\Delta}\alpha))(\mathbf{x}'+\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x})-\mathbf{y}||_2 \cong$$
$$||\mathbf{A}(\alpha')\mathbf{x}'-\mathbf{y}+\mathbf{U}(\mathbf{x}')\boldsymbol{\Delta}\alpha+\mathbf{A}(\alpha')\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}||_2$$

Bu şekilde $(\mathbf{x}', \alpha')$ noktasındaki eniyileme,

$$\min_{\substack{\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x},\boldsymbol{\Delta}\alpha \\ ||\mathbf{W}(\alpha'+\boldsymbol{\Delta}\alpha)||_2\le\epsilon}} \left|\left|[\mathbf{U}(\mathbf{x}')\ \ \mathbf{A}(\alpha')]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}\\ \boldsymbol{\Delta}\alpha\end{bmatrix}+(\mathbf{A}(\alpha')\mathbf{x}'-\mathbf{y})\right|\right|_2 \quad (2)$$

Kareli Sınırlı En Küçük Kareler konveks problemi haline gelir ve Lagrange çarpanları kullanılarak çözülebilir [12]. Bu problemin çözümü için birçok yazılım mevcuttur.

6. Sayısal Algoritma

(1)'de tanımlanan en iyileme problemi konveks değildir ve yerel bir çözüm aşağıda verilen algoritmayla elde edilebilir,

(1) $\alpha = 0, \mathbf{x} = (\mathbf{A^T A})^{-1}\mathbf{A^T y}$ olarak başlatılır

(2) $\mathbf{x}$ ve α yakınsayana kadar
$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}\\ \boldsymbol{\Delta}\alpha\end{bmatrix}$ için (2)'deki problem çözülür
$\mathbf{x}$ ve α, $\mathbf{x}+\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$ ve $\alpha+\boldsymbol{\Delta}\alpha$ olarak güncellenir
$\mathbf{A}(\alpha)$ ve $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ matrisleri oluşturulur

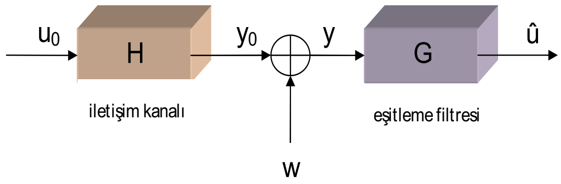
7. Kanal Eşitleme

$u_0[n]$ bilinen deterministik ayrık zamanlı sinyal, bilinmeyen $H(z)$ doğrusal zamanla değişmez süzgecinden geçtikten sonra istatistiği bilinmeyen gürültüyle eklenerek gözlenen $y[n]$ $0 \le n < N$ sinyalini oluşturmuştur. Şekil 2 de gösterildiği gibi kanal eşitleme işlevi, sonlu dürtü yanıtı $g[n]$, $0 \le n < p$ olan süzgeçle yapılmak istenirse $y[n] * g[n] \approx u_0[n]$ evrişimi aşağıdaki doğrusal matris denklemiyle gösterilebilir [13],

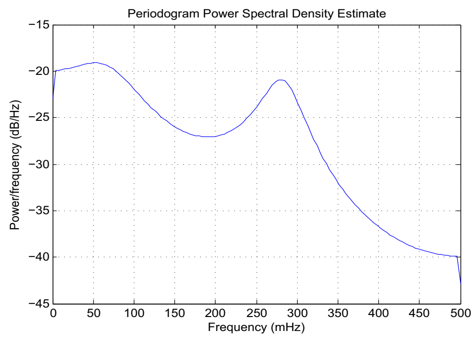
$$\begin{bmatrix} y[p-1] & \cdots & y[1] & y[0] \\ y[p] & \ddots & y[2] & y[1] \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y[N-1] & & \cdots & y[N-p] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g[0]\\ g[1]\\ \vdots \\ g[p-1]\end{bmatrix}$$
$$\approx \begin{bmatrix} u_0[p-1]\\ u_0[p]\\ \vdots \\ u_0[N-1]\end{bmatrix} \quad (3)$$

Yakın zamanda [14] ve [15] kaynaklarında bu denklem sistemine katsayı matrisinin Toeplitz yapısı dikkate alınmadan TLS yöntemi uygulanmış ve iyi bilinen LMS kanal eşitleyicilere göre sembol hata oranında yüksek başarım artışı gözlenmiştir. Önerilen yöntem bilinmeyen gürültünün katsayı matrisindeki yapısını, sağdan $(i+1)$'inci köşegeni 1 olan aşağıdaki $\mathbf{A_i}$ matrisleriyle dikkate alır,

$$\mathbf{A_i} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Şekil 2: Kanal eşitleme problemi



Şekil 3: H süzgecinin spektrumu

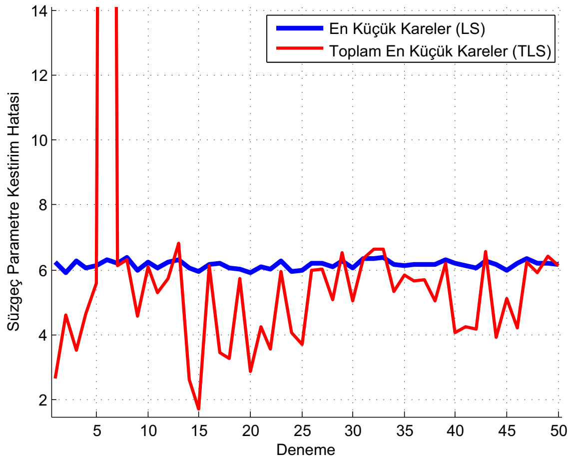
STLS yaklaşımıyla, $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{y}$ üzerinde düzeltmelerle maliyet fonksiyonunun sıfıra indirilerek denklem sisteminin tutarlı hale getirilmesi, kanalı tam olarak eşitleyecek sonlu dürtü yanıtlı doğrusal süzgeçler var olduğu anlamına gelir. Ancak bu çoğu uygulamada doğru değildir. Önerilen yöntem denklem sistemindeki tutarsızlığı belirli sınırlar içerisinde azaltır ve gerçek ile model arasındaki kaçınılmaz farklılığı dikkate alır. Gürültü spektrumu ile ilgili bilgi bulunmadığında bu sınırlar E_g gürültü enerjisi olmak üzere $||\alpha||_2 \le \gamma\sqrt{E_g}$, $0 < \gamma \le 1$ olarak tanımlanabilir. Gürültü spektrumu hakkında önceden bilinenleri kullanmak amacıyla $\mathbf{W}$ matrisi ayrık zamanlı alçak ya da yüksek geçirgen işlevi seçilebilir.

8. Sayısal Sonuçlar

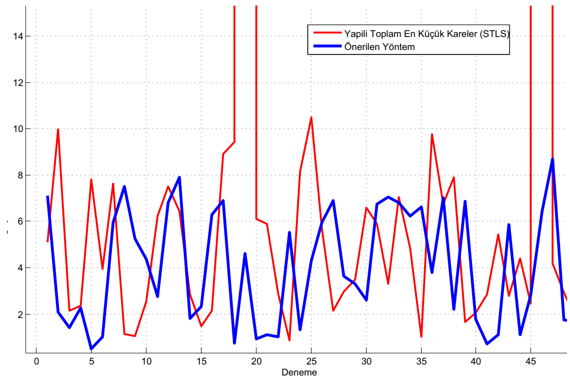
$H(z) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{4} a[k]z^{-k}}$, $\mathbf{a}=$ $0.7[5, -5, 4, -4, 2]$ tüm kutuplu süzgecinin spektrumu Şekil 3'te gösterilmektedir. Gürültüsüz durumda $G(z) = H(z)^{-1} = \sum_{k=0}^{4} a[k]z^{-k}$ tüm sıfırlı süzgeci kanalı tam olarak eşitler. Gözleme $w[n]$ beyaz Gauss gürültüsü eklendiğinde bilinen girdi $u_0[n]$ kare dalga seçilerek LS, TLS, STLS ve önerilen yöntem (3)'teki denklem sisteminde $g[n]$ eşitleyici dürtü yanıtını bulmak için kullanılmış ve kestirim hatası $(\sum_n (g[n]-\hat{g}[n])^2)^{1/2}$, 10dB sinyal gürültü oranında 50 bağımsız denemede Şekil 4 ve Şekil 5'te gösterilmiştir. Önerilen yöntemde sınır parametreleri $\mathbf{W} = \mathbf{I}$, $\gamma = 0.8$ seçilmiştir.

Tablo 1'de ve Şekil 4 ve 5'te görüldüğü gibi katsayı matrisindeki hatalar yanlış parametre kestirimine yol açtığı gibi gürültüye hassaslığı da artırmaktadır. Önerilen yöntem, kanal parametre kestirimini diğer yöntemlere göre daha başarılı ya-

978-1-4244-4436-6/09/$25.00 ©2009 IEEE



Şekil 4: 50 bağımsız denemede LS ve TLS kestirim hataları



Şekil 5: 50 bağımsız denemede STLS ve önerilen yöntem kestirim hataları

parken gürültüye hassaslığı daha azdır. Ayrıca yöntemin kestirdiği diğer sinyal olan gürültü $w[n]$'in spektrum bilgisi kullanılarak optimal Wiener düzleştirici $G(z)$ filtresinin ardına eklenerek eşitlemede gürültü yükseltimi en aza indirilebilir.

	LS	TLS	STLS	Önerilen
Ortalama	6.1598	6.5077	3.1363e+14	4.0265
Medyan	6.1761	5.4512	4.2770	3.7120

Tablo 1: Kestirim hata istatistikleri

9. Sonuç

Doğrusal denklem sistemleri için mevcut yöntemler ve eksiklikleri tartışılmış, yeni bir yöntem incelenmiş ve sayısal bir algoritma sunulmuştur. Yöntemin, katsayı matrisi yapılı ve hata içeren sistemlerde gürültüye daha az hassas olduğu ve daha isabetli kestirim yaptığı kanal eşitleme örneğinde gösterilmiştir.

10. Kaynakça

[1] M. Pilanci, O. Arikan, B. Oguz, M.C. Pinar, "Structured Least Squares with Bounded Data Uncertainties", Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing 2009'da sunulacak.

[2] G.H. Golub, F. Van Loan, "An Analysis of the Total Least Squares Problem", SIAM J. Numer. Anal, 1980.

[3] I. Markovsky, S. Van Huffel, and R. Pintelon, "Block-Toeplitz/Hankel Structured Total Least Squares", Tech. Rep. 03–135,2003.

[4] L. El-Ghaoui, H. Lebret. "Robust Solutions to Least-Squares Problems with Uncertain Data", SIAM J. Matrix Anal. Appl. 18, 1035–1064 (1997).

[5] A. Pruessner, D.P. O'Leary, "Blind Deconvolution Using a Regularized Structured Total Least Norm Algorithm", SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2002.

[6] T. Abatzoglou, J. Mendel, and G. Harada, "The Constrained Total Least Squares Technique and its Application to Harmonic Superresolution", IEEE Trans. Signal Process., 39 (1991),pp. 1070–1087.

[7] M. Gillaud, "Transmission and Channel Modeling Techniques for Multiple-Antenna Communication Systems", Ph.D. Thesis, TELECOM ParisTech.

[8] H. Chen, S. Van Huffel, J. Vandewalle, "Improved methods for exponential parameter estimation in the presence of known poles and noise", IEEE Transactions on Signal Processing, 1997.

[9] H. Chen, S. Van Huel, D. Van Ormondt, "Application of the Structured Total Least Norm technique in spectral estimation", Proc. of the 8th European Signal Processing Conference, 1996.

[10] Z. Jianxiong, Z. Hongzhong, S. Zhiguang, F. Qiang, "Global Scattering Center Model Extraction of Radar Targets Based on Wideband Measurements", IEEE Transactions on Antennas andPropagation, 2008.

[11] I. Gohberg, I. Koltracht, "Mixed, Componentwise, and Structured Condition Numbers", SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 1993.

[12] G. H. Golub and U. von Matt, "Quadratically Constrained Least Squares and Quadratic Problems", Numer. Math., 59 (1991), pp. 561–580.

[13] R.D. DeGroat, E.M. Dowling, "The Data Least Squares Problem and Channel Equalization" IEEE Transactions on Signal Processing, 42:1, 407–411 (1993).

[14] J.S. Lim, "Neural Network Based Data Least Squares Algorithm for Channel Equalization", Advances in Neural Networks ISNN 2007 pp 678-685 Springer, 2007.

[15] J. Lim, "Recursive DLS solution for extreme learning machine-based channel equalizer", Neurocomputing 71 (2008), pp. 592–599.

[16] S. Chandrasekaran, M. Gu, A. H. Sayed, and K. E. Schubert, "The degenerate bounded error-in-variables model", SIAM J. Matrix Anal. Appl., vol. 23, pp. 138–166, 2001.

[17] J.B. Rosen, H. Park, J. Glick, "Total Least Norm Formulation and Solution for Structured Problems", SIAM J. of Matrix Analysis Applications, vol. 17, no. 1, Jan. 1996.