

# Kutupsal Sıkıştırılmalı Örneklemeye: Kutuplaşma Kodları ile Yeni Bir Yöntem

## Polar Compressive Sampling: A Novel Technique using Polar Codes

Mert Pılandı, Orhan Arıkan, Erdal Arıkan

Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü Bilkent Üniversitesi, Ankara  
{pılandı,oarıkan,arıkan}@ee.bilkent.edu.tr

### Özetçe

*Kutuplaşma Kodları kısa bir süre önce bulunan ve birçok iletişim kanalı için Shannon kapasitesine eriştiği ispatlanan ilk uygulanabilir kodlama yöntemidir. Kutuplaşma kodları Reed-Muller kodlarıyla benzerlik taşımakta fakat kanal özelliklerine uyarlamalı bir şekilde oluşturulduğu için silinim (erasure) kanallarında daha yüksek başarımlı sağlamaktadır. Reed-Muller kodlarının Sıkıştırılmalı Algılamada (Compressed Sensing, CS) kullanılmasından yola çıkarak, bu bildiride Kutuplaşma kodlarını CS ölçüm matrisleri olarak öneriyor ve sayısal performanslarını karşılaştırıyoruz. Ayrıca silinim kanalı ile CS kuramı arasındaki cebirsel ilişkiyi gösterip hızlı çözüm tekniklerini tartışıyoruz.*

### Abstract

*Recently introduced Polar coding is the first practical coding technique that can be proven to achieve the Shannon capacity for a multitude of communication channels. Polar codes are close to Reed-Muller codes except the fact that they are tuned for the parameters of the channel. Hence, Polar codes are shown to offer better performance, e.g., in the erasure channel. It is known that second order Reed-Muller codes can be used for Compressed Sensing. Inspired by that result, we propose Polar codes as measurement matrices in CS and compare their numerical performances. We also present the algebraic relation between the erasure channel and CS theory, and discuss fast solution techniques.*

**Index Terms**—Polar Codes, Compressed Sensing

### 1. Giriş

Kutuplaşma Kodları kısa bir süre önce bulunan ve birçok iletişim kanalı için Shannon kapasitesine eriştiği ispatlanan ilk uygulanabilir kodlama yöntemidir [1]. Bu bildiride Kutuplaşma Kodlarının son yıllarda birçok araştırmanın odağı olan Sıkıştırılmalı Algılamaya uygulanması ve sayısal incelenmesi sunulacaktır.

### 2. Kutuplaşma Kodları (Polar Codes)

#### 2-A. Reed-Muller Kodları

Öncelikle  $N = 2^n$  blok uzunluğa sahip Reed Muller (RM) kodlarının  $n \times n$  üretici matrisini tanımlayalım:

$$\mathbf{G}_{RM}(n, n) = \mathbf{F}^{\otimes n}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$\mathbf{F}^{\otimes n}$  ifadesi  $\mathbf{F}$  matrisinin  $n$ 'inci tensör kuvvetini ifade eder. Şekil 2(a)'da  $\mathbf{G}_{RM}(n, n)$  matrisinin özyinemeleli doğası

gösterilmektedir.  $r$ 'inci derece Reed-Muller kodu bu matrisin Hamming ağırlığı  $2^{n-r}$ 'dan büyük ve eşit olan satırlarını alarak oluşturduğumuz  $\mathbf{G}_{RM}(r, n)$  matrisi ile ifade edilir. Görüldüğü gibi RM kod matrisi iletişim kanalının özelliklerinden bağımsız oluşturulmaktadır.

#### 2-B. Kanal Kutuplaşması

Kutuplaşma kodları ise bilgi kuramsal bir olay olan kanal kutuplaşması kullanılarak kanal parametrelerine uyarlamalı olarak oluşturulur ve Shannon kapasitesine eriştiği ispatlanmıştır [1].

Şekil 1(a)'da görülen dönüşüm  $\mathcal{X} = \{0, 1\}$  ikili alfabesinde tanımlı ve  $\mathcal{X}^2$  üzerinde düzgün dağılmış  $U_0, U_1$  rastgele değişkenlerini hafızasız  $W$  kanalının iki bağımsız kopyasına iletmekte ve  $Y_0, Y_1$  çıktısını almaktadır. Şekil 1(b)'deki gibi  $N$  adet bağımsız  $W$  kanalı kopyasına yinelemeli bir şekilde  $\mathbf{F}$  uygulanırsa, kanaldaki karşılıklı bilgi, zincir kuralı ile aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$I(U_0^{N-1}; Y_0^{N-1}) = \sum_{i=0}^{N-1} I(U_i; Y_0^{N-1}, U_0^{i-1}). \quad (2)$$

Kanal kutuplaşması, yukarıdaki toplam içindeki karşılıklı bilgi terimlerinin asimptotik olarak  $I(W)$  oranının  $1/e$ , geri kalanların da  $0$ 'a yakınsaması olayıdır. Oluşan bu alt kanallardan iyi olanlar kullanılır ve geri kalanlar dondurulursa kanal kapasitesinde iletişim sağlanabilir. Kutuplaşma kodlarını oluşturmak için  $\mathbf{F}^{\otimes n}$  dönüşümü sonucunda oluşan karşılıklı bilgi sıralamasının bulunması gerekmektedir.

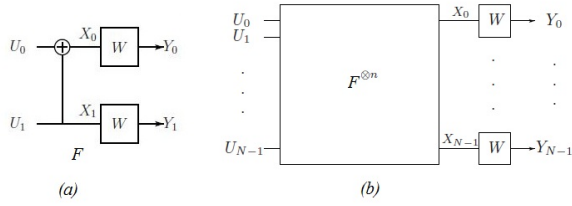
Silinme olasılığı  $\epsilon$  olan İkili Silinim Kanalında (BEC( $\epsilon$ )) kutuplaşma dizilimini bulmak için  $(z_{N,1}, \dots, z_{N,N})$  vektörü  $z_{1,1} = \epsilon$ 'den başlayan aşağıdaki özyineleme ile hesaplanır [2]:

$$z_{2k,j} = \begin{cases} 2z_{k,j} - z_{k,j}^2 & \text{for } 1 \leq j \leq k \\ z_{k,j-k}^2 & \text{for } k+1 \leq j \leq 2k \end{cases} \quad (3)$$

Daha sonra,  $(1, \dots, N)$  kümesinin bir permutasyonu  $(i_1, \dots, i_N)$  dizisi,  $z_{(N,i_j)} \leq z_{(N,i_k)}$  olacak şekilde sıralanır.  $\mathbf{F}^{\otimes n}$  matrisinin  $i_1, \dots, i_M$ 'nci satırları alınarak  $(N, M)$  Kutuplaşma Kodu oluşturulmuş olur.

### 3. Sıkıştırılmış Algılama (Compressed Sensing)

Sıkıştırılmış Algılama herhangi bir bazda seyrek, yani çoğu değeri sıfır olan sinyaller için geliştirilmiş devrimsel bir örneklemeye yöntemidir [3], [4]. Klasik Shannon Örneklemesinin zorunlu kıldığı Nyquist Hızının altında dahi



Şekil 1. (a) Kutupsallaşmanın yapı taşı  $\mathbf{F}$  Dönüşümü, (b)  $\mathbf{F}$  dönüşümünün yinelemeli uygulanması [12]

CS sinyalleri tekrar oluşturabilir. Örnekleme istediğimiz sinyal  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^N$  olsun ve bilinen bir ortonormal bazda,  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_N\}$ , seyrek olduğunu varsayalım:

$$\mathbf{s} = \Phi \mathbf{x} \quad (4)$$

Baz matrisini  $\Phi = [\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_N]$  Ayrık Fourier Dönüşümü, Dalgacık Dönüşümü ya da Zaman-Frekans sözlüğü olarak seçmek mümkündür. Çoğu sayısal sinyal işleme uygulamasında  $\Phi$  baz matrisi bilindiğinde,  $\mathbf{s}$  sinyalinde ilgilendiğimiz bilgiyi taşıyan kısım  $\mathbf{x}$  vektöründe çok az sayıda indise karşılık gelmektedir. Örnekleme işleminin doğrusal olduğunu ve  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  matrisi ile gösterildiğini kabul edersek:

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{s} = \mathbf{B}\Phi\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A} \triangleq \mathbf{B}\Phi, \quad (5)$$

elimizdeki örnekleri içeren  $\mathbf{y}$  vektörünü kullanarak seyrek  $\mathbf{x}$ 'i çözmek  $\mathbf{s}$  sinyalimizi geri getirmekle eşdeğerdir. Sıkıştırılmış Algılamayı mümkün kılan en önemli bulgu, bu çözümlerden en küçük  $l_1$  norma sahip olan vektörün aradığımız doğru çözümle çakışması ve doğrusal programlama ile polinom zamanda belirlenebilmesidir [4]:

$$\min_{\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{y}} \|\mathbf{x}\|_1 = \min_{\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{y}} \sum_{i=1}^N |x_i| \quad (6)$$

Bu durum sadece bazı  $\mathbf{B}$  ölçüm matrisi aileleri için geçerlidir. Kısıtlanmış İzometri Özelliği (Restricted Isometry Property, RIP) olarak adlandırılan bu özellik şöyle tanımlıdır:

Herhangi bir  $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^+$  için  $\mathbf{A}$  matrisinin izometri sabiti  $\delta_s$ , aşağıdaki ifadeyi bütün  $\mathbf{s}$ -seyrek  $\mathbf{x}$  vektörleri için sağlayan en küçük, negatif olmayan sayıdır,

$$(1 - \delta_s) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta_s) \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (7)$$

İzometri sabiti  $\delta_s$ 'in  $\sqrt{2} - 1$ 'den küçük olması durumunda (6)'daki  $l_1$  norm çözüm tekdir ve doğru sonucu verir. İlk olarak rastgele oluşturulan matrislerin bu özelliğe yüksek olasılıkla sahip olduğu keşfedilmiş [1] daha sonra Toeplitz gibi bazı deterministik matrislerin de bunu sağladığı gösterilmiştir [11].

Sıkıştırılmış Algılama teknolojisini donanımsal olarak gerçekleştirmek büyük ölçüde algılama matrisinin yapısına bağlıdır. Bu yüzden hızlı çözüm tekniklerine imkan tanıyacak yapıda, rastgeleleştirme gerektirmeyen, fiziksel gerçekleşmesi yapılabilecek matrisler bulma bu alanda çok önemli ve açık bir problemdir. Son birkaç yıldaki eğilim Bilgi ve Kodlama Kuramındaki geniş literatürü bu alanda kullanmak olmuştur. Reed-Muller kodları [5], BCH kodları [6] ve Hadamard Matrisinden rastgele türetilen kodlar [7] Sıkıştırılmış Algılamada deneysel olarak kullanılmış ve iyi sonuçlar vermiştir.

#### 4. Sıkıştırılmış Örneklemenin Kanal Kodlaması Olarak Yorumu

Öncelikle  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ 'nin çözüm kümesi

$$\{\mathbf{A}^\dagger \mathbf{y} + \mathbf{G}\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-m}\} \quad (8)$$

olarak gösterilebilir. Burada  $\mathbf{A}^\dagger \triangleq \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}$  ve  $\mathbf{G}$  matrisi  $\mathbf{A}$  matrisinin boş uzay (nullspace) baz matrisidir ( $\mathbf{G}^T \mathbf{G} = \mathbf{I}$ ). Bu yer değiştirmeyi (6)'da kullanırsak aşağıdaki sınırlamasız optimizasyona ulaşırız:

$$\min_{\mathbf{u}} \|\mathbf{z} - \mathbf{G}\mathbf{u}\|_1, \quad \mathbf{z} \triangleq \mathbf{A}^\dagger \mathbf{y} \quad (9)$$

Şimdi (9)'deki optimizasyonun sonucu olacak eşlenik bir kanal kodlaması problemi oluşturabiliriz.  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-m}$  vektörünü  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times n-m}$  matrisi ile  $\mathbf{G}\mathbf{u}$  olarak doğrusal kodladığımızda seyrek olarak gerçel değerlerle bozan bir kanaldan geçerse  $\mathbf{z} = \mathbf{G}\mathbf{u} + \mathbf{w}$  gözleminden  $\mathbf{w}$  seyrek olacak şekilde  $\mathbf{u}$ 'yu çözmek (9)'deki problemle aynıdır. Bu şekilde bir gerçel sayı kodlamasının Sıkıştırılmış Algılamayla çözülebilmesi [13]'te bulunmuştur ve sürekli alfabelerde kanal kodlaması ile çok yakın bir problem olduğu gözlenmiştir.

#### 5. Kutupsal Sıkıştırılmış Örnekleme

Bu bölümde Kutuplaşma Kodlarının Sıkıştırılmış Algılamada kullanılması anlatılacaktır. Önemli bir fark şu an için kutuplaşma olayının ikili, üçlü ve  $p$  asal olmak üzere  $p$ 'li sayı sistemlerinde gösterilmiş olmasıdır. Sıkıştırılmış Algılama kuramında ise gerçel sayılar kullanılır. Bu uyumsuzluğu aşmak için daha önce BCH kodlarını gerçel sayılara uyarlamada [6] denenmiş olan  $(1, 0) \rightarrow (1, -1) \in \mathbb{R}$  atamasını kullanıyoruz. Böylece,

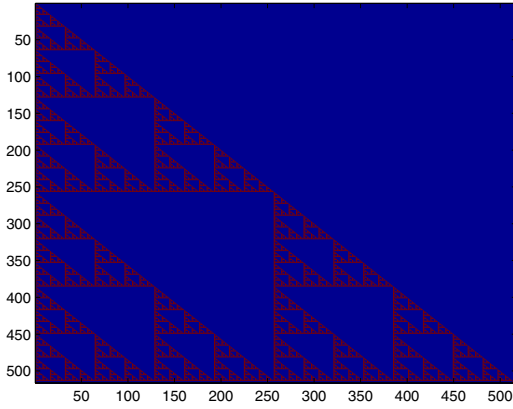
$$\mathbf{F}_{\text{Gerçel}}^{\otimes n} = \left[ \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right]^{\otimes n} \quad (10)$$

ortonormal Hadamard Dönüşüm Matrisi haline gelmekte ve hızlı dönüşümle  $O(N \log N)$  karmaşıklıkta hesaplanabilme özelliğini korumaktadır. Önerdiğimiz Kutupsal Sıkıştırılmış Örnekleme bu matrisin  $K$  adet satırını (3)'te gösterilen kutuplaşma sıralamasına göre seçer ve (5)'te bahsedilen  $\mathbf{B}$  ölçüm matrisi olarak kullanır. Ortaya çıkan matris Şekil 2(b)'de gösterilmiştir. Silinim olasılığı  $\epsilon$ 'un pratik olarak 0.5 alınmasının birçok kanal için iyi sonuç verdiği önceden gözlenmiştir [2]. Sayısal örneklerde bu seçimin Sıkıştırılmış Algılama için de uygun olduğu bulunmuştur.

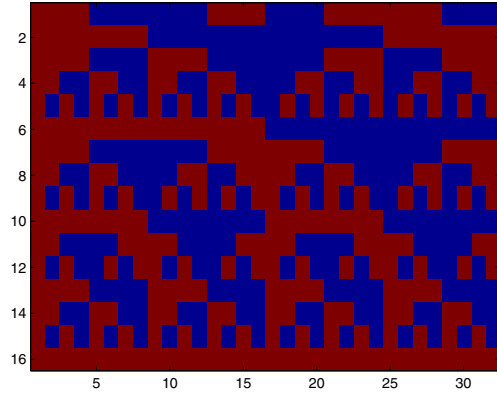
Sıkıştırılmış Algılama literatüründe çok sık kullanılan Gauss dağılımlı ölçüm matrislerinin oluşturulması ve çarpım işleminin gerçekleştirilmesi ciddi güçlenmesi sorunlarına yol açabilir. Şekil 2(c)'de görüldüğü gibi Gauss matrislerinde bir yapı mevcut değildir ve ölçüm  $O(N^2)$  çarpım işlemi gerektirmektedir. Önerdiğimiz Kutupsal örnekleme kullanıldığında ise  $O(N \log N)$  karmaşıklıkta ölçüm mümkündür, ayrıca matris elemanları  $\pm 1$  olduğundan kelebek yapısı ile donanımsal olarak gerçekleştirildiğinde çarpma işlemleri yerine aslında sadece sayının işaret bitinin değişmesi yeterlidir.

#### 6. Sayısal Sonuçlar ve Uygulamalar

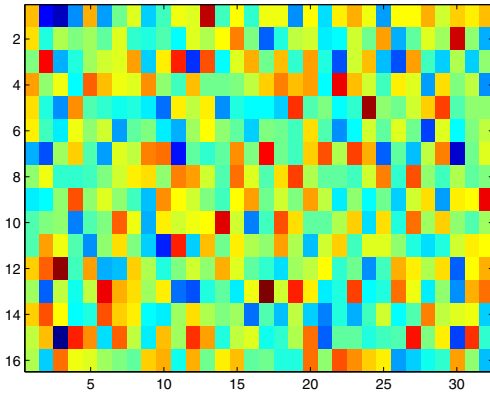
Bu bölümde Kutupsal Örnekleme matrisinin izometri sabiti incelenmekte ve Nyquist hızı altında sinyal örneklemede performans karşılaştırılmaktadır



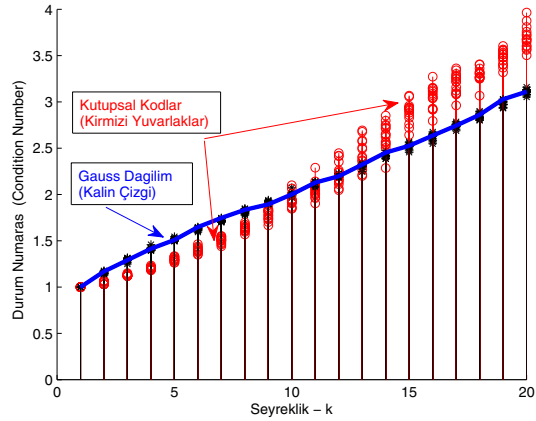
(a) Reed-Muller Matrisi



(b) Kutuplaşma Kodları Matrisi



(c) Gauss Dağılımlı Rastgele Matris



(d) Gauss ve Kutupsal kod matrislerinin durum numaraları

Şekil 2. Örneklem Matrisleri ve Durum Numaraları

### 6-A. Durum Numaraları

Izometri sabitini hesaplamak üstsel karmaşıklıktadır fakat ölçüm matrisinin rastgele seçilen kolonlardan oluşan altmatrisinin durum numarası  $\kappa = \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{B})}{\sigma_{\min}(\mathbf{B})}$  bu sabiti karşılaştırmak için kullanılabilir [10]. Farklı seyreklik değerlerine göre elde edilen sayısal sonuçlar Şekil 2(d)'de gösterilmiştir. Aynı işlem Gauss dağılımlı bağımsız  $N(0, 1)$  girdilere sahip matris için de tekrarlandığında, Kutupsal ölçüm matrisinin düşük  $k$  değerlerinde daha düşük, yüksek  $k$  değerlerinde daha yüksek durum numarasına sahip olduğu gözlenir. Durum numarasının 1'e yakınlığı daha küçük RIP sabitine denk geldiğinden daha yüksek başarımlı anlamına gelmektedir. Diğer bir deyişle düşük seyreklikte Kutupsal ölçüm tekniği, Gauss dağılımdan daha iyidir. Fakat seyreklik  $k$  büyüdükçe matrisin deterministik olması nedeniyle rastgele seçilen  $k$  kolon arasında yaklaşık doğrusal bağıntılar görülmeye başlanır ve başarımlı düşer.

### 6-B. Nyquist Hızı altında Sinyal Örneklem Örneği

Şekil 3(a)'da görülen parçalı kübik polinomlardan oluşan aşağıdaki sinyal  $s[n]$ 'in Daubechies-8 dalgacık bazında seyrek olduğu bilinmektedir [8] ve bu katsayılar Şekil 3(b)'de

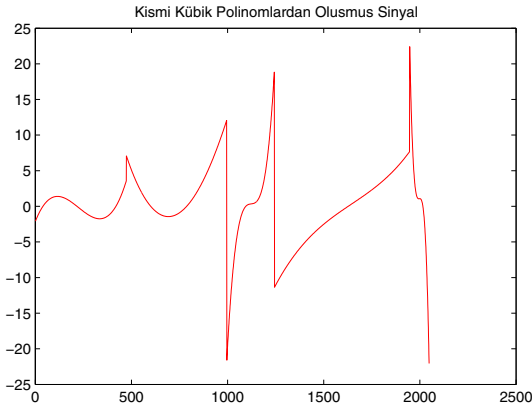
gösterilmiştir.

$$s[n] = a_i n^3 + b_i n^2 + c_i n + d_i, \quad 1 \leq n_i \leq n \leq n_{i+1} \leq 2048$$

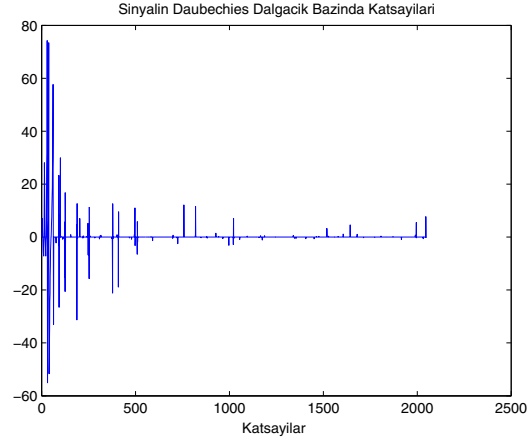
Sinyaldeki süreksizlikler nedeniyle Shannon örnekleme tüm 2048 değerini iletmesini gerektirir. Sıkıştırılmalı örneklemede ise  $\mathbf{B}s$  çarpımıyla sinyalden  $M = 600$  adet iç çarpım alınmıştır. Karşılaştırma için  $\mathbf{B}$  ölçüm matrisi Kutupsal ve Gauss dağılımlı olarak iki farklı şekilde oluşturulmuş ve Basis Pursuit DeNoising (BPDN) olarak bilinen aşağıdaki optimizasyon MATLAB kullanılarak Sparco Toolbox [9] ile çözülmüştür.

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1 \quad (11)$$

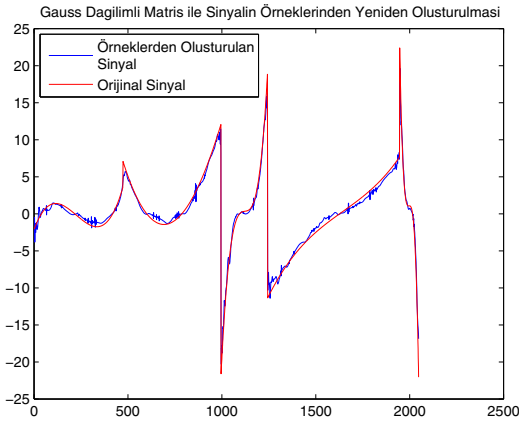
Kestirilen  $\hat{\mathbf{s}} = \Phi \hat{\mathbf{x}}$  sinyalleri iki yöntem için de en iyi  $\lambda$  değerleri için Şekil 3(c-d)'de gösterilmektedir. Gauss dağılımlı örneklemede BPDN sonucu  $\mathbf{x}'$ te 175 sıfır olmayan terim bulunmuşurken, Kutupsal Örneklemede 140 sıfır olmayan terim bulunmuşur. Şekillerden görüldüğü gibi Kutupsal örneklemenin sonucu daha az terimle bir yaklaşım yapılmasına rağmen Gauss dağılımlı örnekleme göre daha iyidir. Bu sonuç durum numaralarının seyrek vektörler için daha küçük olmasını destekler niteliktedir.



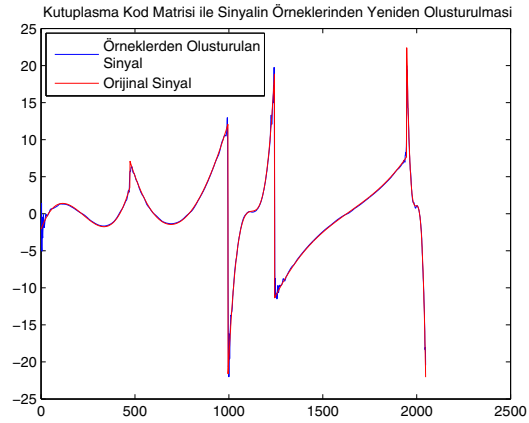
(a) Kısmi Kübik Polinomlardan Oluşmuş Sinyal



(b) Sinyalin Daubechies Dalgacık Bazındaki Katsayıları



(c) Gauss Dağılımla Sıkıştırılmış Algılama, (çözümde 175 adet sıfır olmayan terim)



(d) Kutuplaşma Kodları ile Sıkıştırılmış Algılama, (çözümde 140 adet sıfır olmayan terim)

Şekil 3. Nyquist Hızı altında Sinyal Örnekleme

## 7. Sonuç

Kutuplaşma Kodlarının Sıkıştırılmalı Algılamaya uygulanıp Kutupsal Örnekleme adını verdiğimiz yöntemin sayısal olarak incelenmesi sunulmuştur. Kutupsal örnekleme donanımsal gerçekleştirme açısından diğer bilinen yöntemlere göre çok daha avantajlıdır. Ölçüm matrisinin  $\pm 1$  olması, dönüşümün  $O(N \log N)$  sürede yapılabilmesi ve kestirim sonucunun Gauss örneklemeden düşük seyreklik değerlerinde daha iyi olması Kutupsal Örneklemenin iyi bir seçim olacağını gösterir.

## 8. Kaynakça

- [1] E. Arıkan, "Channel polarization: A method for constructing capacity achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels," IEEE Tran. On Info. Theory, Vol. 55(7):3051-3073, Jul. 2009.
- [2] E. Arıkan, "A Performance Comparison of Polar Codes and Reed-Muller Codes," IEEE Communications Letters, vol. 12, no. 6, 2008.
- [3] D. Donoho, Compressed sensing, IEEE Tran. On Info. Theory, Vol. 52(4):1289-1306, Apr. 2006.
- [4] E. Candes and T. Tao, "Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information", IEEE Tran. On Info. Theory, Vol. 52(2):489-509, Feb. 2006.
- [5] S.D. Howard, A.R. Calderbank, S.J. Searle, "A Fast Recon-

struction Algorithm for Deterministic Compressive Sensing Using Second Order Reed-Muller Codes", 42nd Annual Conference on Information Sciences and Systems, 2008. CISS 2008. n. 11-15, Feb. 2008.

- [6] A. Amini, F. Marvasti, "Deterministic Construction of Compressed Sensing Matrices using BCH Codes", 2009 arXiv:0908.0619v2.
- [7] L. Gan, T. T. Do, and T. D. Tran, "Fast compressive imaging using scrambled block Hadamard ensemble," Eusipco, 2008.
- [8] E.J. Candes and J. Romberg, "Practical signal recovery from random projections," Wavelet Applications in Signal and Image Processing XI, Proc. SPIE Conf. 5914, 2004.
- [9] E. van den Berg, M. P. Friedlander, G. Hennenfent, F. Herrmann, R. Saab, O. Yilmaz, "Sparco: A testing framework for sparse reconstruction," TR-2007-20, October 2007.
- [10] R. Baraniuk, M. Davenport, R. DeVore, and M. Wakin, A Simple Proof of the Restricted Isometry Property for Random Matrices, Constr. Approx., Springer, Vol 28, Dec. 2008
- [11] V. Saligrama, Deterministic Designs with Deterministic Guarantees: Toeplitz Compressed Sensing Matrices, Sequence Designs and System Identification
- [12] S.B.Korada, Polar Codes for Channel and Source Coding, Ph.D. dissertation, EPFL, Lausanne, Switzerland, May 2009.
- [13] E. J. Candes, T. Tao. Decoding by linear programming. IEEE Trans. Info. Theory, 51(12):4203-4215, Dec. 2005.