

Nicemlenmiş Ölçümlere Bağımsız Gürültü Eklenerek Ortalama Fisher Bilgisi Optimizasyonu

Average Fisher Information Optimization for Quantized Measurements Using Additive Independent Noise

Gökce Osman Balkan, Sinan Gezici

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Bilkent Üniversitesi, Bilkent, Ankara 06800, Türkiye

{balkango,gezici}@ee.bilkent.edu.tr

Özetçe

Doğrusal olmayan sistemlere gürültü eklemek sistemin performansını artırabilmektedir. Ek gürültünün faydaları, nicemlenmiş gözlemlere dayalı parametre kestirim problemlerinde de görülmektedir. Bu çalışmanın amacı, bu tarz problemlerde gözlemlere nicemlenmeden önce eklenilmesi gereken optimal gürültünün ortalama Fisher bilgisi ölçütüne göre olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmaktır. İlk olarak optimal gürültünün olasılık yoğunluk fonksiyonu, ortalama Fisher bilgisi optimizasyonu problemi cinsinden ifade edilmiştir. Daha sonra, optimal ek "gürültü"nin sabit bir sinyal olarak ifade edilebileceği kanıtlanmıştır. En büyük ortalama Fisher bilgisini elde etmek için ek sinyal seviyelerinin rastgeleleştirilmesinin gerek olmadığı anlamına gelen bu sonuç, iki ayrı sayısal örnek ile desteklenmiştir.

Abstract

Adding noise to nonlinear systems can enhance their performance. Additive noise benefits are observed also in parameter estimation problems based on quantized observations. In this study, the purpose is to find the optimal probability density function of additive noise, which is applied to observations before quantization, in those problems. First, optimal probability density function of noise is formulated in terms of an average Fisher information maximization problem. Then, it is proven that optimal additive "noise" can be represented by a constant signal level. This result, which means that randomization of additive signal levels is not needed for average Fisher information maximization, is supported with two numerical examples.

1. Giriş

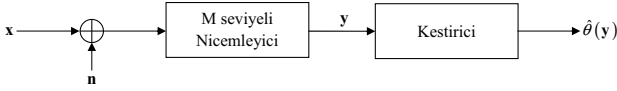
Gürültü, genellikle sistemlerin performansını olumsuz yönde etkilese de bazı sistemlerin performansını artırabilmektedir [1]-[3]. Gürültünün faydaları kırıptılandırma ("dithering") kavramı altında, nicemlenmiş sistemlerde de görülmektedir ([4] ve içindeki kaynaklar). [4] numaralı çalışmadaki gibi, günümüzde ek gürültünün olumlu katkısı parametre kestirim problemlerinde de araştırılmaktadır [5]-[7].

Nicemlenmiş gözlemlerin kırıptılandırılmış olduğu bazı gürültü ile geliştirilmiş kestirim problemlerinde, kestiricilerin

sonuşurda ("asymptotical") davranışları ve ortalama hata kare hesabının bazı durumlarda zor olması, Cramer-Rao alt sınırını performans artış ölçümü için uygun bir ölçüt kalmaktadır. Bu ölçüte göre, nicemlenmiş gözlemlere dayalı gürültü ile geliştirilmiş kestirim problemlerinde performans artışı, nicemlenme aralıklarının optimalleştirilmesiyle [8], kasten eklenen rastgele gürültü ile [9], sabit bir gürültünün kasten eklenilmesi ile aynı etkiyi sağlayan uygun bir nicemleyici eşliğinin seçimiyle [10], [12] ve girdi sinyalinde mevcut olan gürültü değişintisinin uygun bir değere çekilmesiyle sağlanabilmektedir [11], [12].

[9], [11] ve [12] numaralı çalışmalarda, ek gürültünün Fisher bilgisine katkıları araştırılmış olsa da, nicemlenmiş gözlemlere bağlı kestirim problemlerinde ortalama Fisher bilgisinin en yüksek değerine ulaşmasını sağlayan ek gürültünün optimal olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmaya yönelik bir çalışma yapılmamıştır. [13] numaralı çalışmada ise nicemlenmiş gözlemlere bağlı kestirim problemleri için Bayesian Cramer-Rao alt sınırını en aza indirgeyen ek gürültünün yapısı incelenmiştir. Bu çalışmadaki amaç, bu tür problemlerde ortalama Fisher bilgisi ölçütüne göre en iyi kestirim performansını sağlayan ek gürültünün olasılık dağılımını bulmaktır. Ortalama Fisher bilgisinin ölçüt olarak alınmasının sebebi, önsel olasılığa sahip bilinmeyen parametrelerin kestiriminde, ortalama Fisher bilgisinin ortalama hata kareleri için alt sınırı belirleyen önemli bir parametre olmasıdır. Bu makaledeki ortalama Fisher bilgisinin enbüyütülmesi problemi, nicemleyici fonksiyonu, ek gürültü olasılık yoğunluk fonksiyonu ve asıl (gürültü eklenmemiş) gözlemin olasılık yoğunluk fonksiyonu cinsinden tanımlanmıştır. Problemden kestirilmek istenen parametre rastgele ve kestirici de yansız olarak kabul edilmiştir. Ayrıca nicemleyici, çoklu seviyeli ve eşikleri her değeri alabilecek şekilde modellenmiştir.

Makalenin ikinci bölümünde problem tanımı sunulmaktadır. Ardından üçüncü bölümde, ortalama Fisher bilgisini enbüyüten optimal ek gürültünün tek noktada toplanması olasılık yoğunluk fonksiyonu ile ifade edilebildiği, yani optimal gürültünün sabit bir değere sahip olduğu, gösterilmektedir. Bu sonuç, nicemleyicinin eşik değerlerinin kaydırılmasına denk geldiğinden ve farklı gürültü değerleri arasında rastgeleştirme gerektirmediğinden, pratik uygulamalar için avantajlıdır. Bu bölümden çıkan kuramsal sonuçlar, makalenin son bölümünde



Şekil 1: Sistem modeli.

verilen, ek gürültünün ortalama Fisher bilgisine katkı sağladığı ve sağlamadığı iki örnek ile desteklenmektedir.

2. Problem Tanımı

Nicemlenmiş \mathbf{x} gözlemleri içinde barınan θ rastgele parametresini kestirme amacını taşıyan yansız kestiricili bir sistem ele alınmaktadır. \mathbf{x} vektörünün olasılık dağılımı $p_{\theta}^{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ ile ve nicelemleyici $\varphi(\cdot)$ fonksiyonu ile ifade edilmektedir. Sistemin θ 'yı kestirme isabetini arttırması için, nicemlenmeden önce \mathbf{x} gözlemine \mathbf{x} 'ten bağımsız, \mathbf{n} vektörü ve $p_{\mathbf{N}}(\cdot)$ olasılık yoğunluk fonksiyonu ile ifade edilen bir gürültü eklenmekte ve bu şekilde kestirici \mathbf{x} yerine $\mathbf{x} + \mathbf{n}$ 'nin nicemlenmiş halini kullanılmaktadır. Buradaki problem, Şekil 1'deki gibi gösterilen bu sistemde, kestirim başarısını en yüksek seviyeye getirecek gürültünün olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmaktır.

$\mathbf{x} + \mathbf{n}$ 'nin geçtiği nicelemleyicinin M seviyeli olduğu farzedilsin ve bu nicelemleyiciden çıkan gürültülü gözlem $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{n})$ olarak tanımlansın. Burada $\mathbf{y} = [y_1 y_2 \dots y_L]$, $\mathbf{x} = [x_1 x_2 \dots x_L]$ ve $\mathbf{n} = [n_1 n_2 \dots n_L]$ şeklindedir ve nicelemleyici seviyeleri $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{M-1}$ eşikleri ile belirlenmektedir. Daha açık bir şekilde ifade etmek için girdi ve çıktı arasındaki ilişki, $l = 1, 2, \dots, L$ için, $i = 0, 1, \dots, M-1$, $\tau_0 \triangleq -\infty$ ve $\tau_M \triangleq \infty$ olmak üzere,

$$y_l = i, \quad \tau_i < x_l + n_l \leq \tau_{i+1} \quad (1)$$

ile gösterilmektedir. Burada x_1, x_2, \dots, x_L gözlemlerinin ve n_1, n_2, \dots, n_L ek gürültülerin birbirinden bağımsız olduğu ama özdeş dağılımlı olmayabileceği varsayılmaktadır. Bu durumda, y_1, y_2, \dots, y_L çıktıların birbirinden bağımsız olduğu düşünülebilir.

$p_{\theta}^{Y_l}(\cdot)$, verilen bir θ değerine göre çıktının l 'nci bileşeninin olasılık kütle fonksiyonunu ifade ettiğinde, Denklem (1) kullanılarak $i = 0, 1, \dots, M-1$ için

$$\begin{aligned} p_{\theta}^{Y_l}(i) &= P(\tau_i < X_l + N_l \leq \tau_{i+1}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(\tau_i - n < X_l \leq \tau_{i+1} - n) p_{N_l}(n) dn \\ &= E \left\{ F_{\theta}^{X_l}(\tau_{i+1} - N_l) - F_{\theta}^{X_l}(\tau_i - N_l) \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Buradaki beklenti ("expectation") işlemi N_l üzerindedir ve $F_{\theta}^{X_l}(\cdot)$, orijinal gözlemin l 'nci bileşeni olan X_l 'nin olasılık dağılım fonksiyonudur.

Bu çalışmada sistemin kestirim başarısını optimize etmek için kullanılacak ölçüt, ortalama Fisher bilgisidir. Başka bir deyişle, ortalama Fisher bilgisini enbüyüten optimal gürültü dağılımının bulunması hedeflenmektedir. Fisher bilgisi

$$J(\theta) = E \left\{ \left(\frac{\partial \log p_{\theta}^{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \quad (3)$$

olarak tanımlıdır ve Cramer-Rao alt sınırı, yansız bir $\hat{\theta}$ kestiricisi için, $E\{(\hat{\theta}(\mathbf{y}) - \theta)^2\} \geq J(\theta)^{-1}$ şeklinde ifade edilmektedir

[14]. \mathbf{y} çıktıların bileşenleri birbirinden bağımsız oldukları için Denklem (3)'teki Fisher bilgisi

$$J(\theta) = \sum_{l=1}^L J^{Y_l}(\theta) = \sum_{l=1}^L E \left\{ \left(\frac{\partial \log p_{\theta}^{Y_l}(y_l)}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \quad (4)$$

olarak ifade edebilir. Y_1, \dots, Y_L rastgele değişkenlerinin bağımsız özdeşçe dağılmış olmaları durumunda, Denklem (4) $J_{\theta} = L J_{\theta}^{Y_1}$ haline indirgenir.

Bilinmeyen parametre θ 'nın önsel dağılımı $w(\theta)$ ile ifade edildiğinde, ortalama Fisher bilgisi

$$\bar{J} = \int_{\Lambda} J(\theta) w(\theta) d\theta \quad (5)$$

şeklinde hesaplanır. Burada Λ kümesi, parametre uzayını göstermektedir. Parametre hakkında ön bilgi bulunmadığı durumlarda, parametrenin Λ kümesi üzerinde bir biçimli ("uniform") olarak dağıldığı varsayılırsa, Denklem (4) ve (5) kullanılarak, optimal gürültünün olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki problemle ifade edilebilir.

$$p_{\mathbf{N}}^{\text{opt}}(\mathbf{n}) = \arg \max_{p_{\mathbf{N}}(\cdot)} \int_{\Lambda} \sum_{l=1}^L E \left\{ \left(\frac{\partial \log p_{\theta}^{Y_l}(y_l)}{\partial \theta} \right)^2 \right\} d\theta \quad (6)$$

Denklem (6)'daki fonksiyonun yapısından ötürü, optimizasyon problemini $l = 1, \dots, L$ için ayrı ayrı çözmek mümkündür. Diğer bir ifadeyle, optimal gürültünün l 'nci bileşeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$p_{N_l}^{\text{opt}}(n) = \arg \max_{p_{N_l}(\cdot)} \int_{\Lambda} E \left\{ \left(\frac{\partial \log p_{\theta}^{Y_l}(y_l)}{\partial \theta} \right)^2 \right\} d\theta \quad (7)$$

$i = 0, 1, \dots, M-1$ için Y_l 'nin i 'ye eşit olma olasılığı $p_{\theta}^{Y_l}(i)$ ile ifade edildiğinden, Denklem (7)

$$p_{N_l}^{\text{opt}}(n) = \arg \max_{p_{N_l}(\cdot)} \int_{\Lambda} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{1}{p_{\theta}^{Y_l}(i)} \left(\frac{\partial p_{\theta}^{Y_l}(i)}{\partial \theta} \right)^2 d\theta \quad (8)$$

şeklinde ifade edilebilir. Eğer Y_1, \dots, Y_L rastgele değişkenleri bağımsız özdeşçe dağılmışlarsa, yani $l = 1, \dots, L$ için $p_{\theta}^{Y_l}(i) = p_{\theta}^Y(i)$ eşitliği geçerli ise, Denklem (8)'de geçen optimizasyon problemleri özdeştir ve orijinal gözlem \mathbf{x} 'in bütün bileşenlerine eşit miktarda gürültü eklenmesi gerekir.

3. Optimal Gürültünün İstatistiksel Özelliği

Ortalama Fisher bilgisini optimize eden gürültünün istatistiksel özelliğini incelemek amacıyla

$$H_{l,i}^{\theta}(n) \triangleq F_{\theta}^{X_l}(\tau_{i+1} - n) - F_{\theta}^{X_l}(\tau_i - n) \quad (9)$$

$$G_{l,i}^{\theta}(n) \triangleq \frac{\partial F_{\theta}^{X_l}(\tau_{i+1} - n)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_{\theta}^{X_l}(\tau_i - n)}{\partial \theta} \quad (10)$$

fonksiyonları tanımlansın. (2) numaralı ifadeden anlaşılacağı üzere, $H_{l,i}^{\theta}(n)$ için $0 \leq H_{l,i}^{\theta}(n) \leq 1, \forall n$ ve $\sum_{i=0}^{M-1} H_{l,i}^{\theta}(n) = 1$ geçerlidir. (9) ve (10)'daki tanımlara göre, (2)'deki olasılık kütle fonksiyonu ile bunun θ 'ya göre türevi, $p_{\theta}^{Y_l}(i) = E\{H_{l,i}(N_l)\}$ ve $\partial p_{\theta}^{Y_l}(i)/\partial \theta = E\{G_{l,i}(N_l)\}$ olarak ifade edilebilir. O zaman Denklem (8)'deki optimizasyon problemi

$$p_{N_l}^{\text{opt}}(n) = \arg \max_{p_{N_l}(\cdot)} \int_{\Lambda} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{(E\{G_{l,i}^{\theta}(N_l)\})^2}{E\{H_{l,i}^{\theta}(N_l)\}} d\theta \quad (11)$$

haline gelir. Denklem (11)'deki problemin çözümü için ilk önce aşağıdaki önsav sunulmaktadır [13].

Önsav 1: Denklem (9) ve (10)'da tanımlanmış gerçek değerli fonksiyonlar, bütün θ 'lar ve N_i 'nin muhtemel her olasılık yoğunluk fonksiyonu için

$$\sum_{i=0}^{M-1} \frac{(\mathbb{E}\{G_{l,i}^\theta(N_i)\})^2}{\mathbb{E}\{H_{l,i}^\theta(N_i)\}} \leq \max_n \left\{ \sum_{i=0}^{M-1} \frac{(G_{l,i}^\theta(n))^2}{H_{l,i}^\theta(n)} \right\} \quad (12)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt: $\mathbf{Z} = [Z_1 \ Z_2]$ için $f(\mathbf{Z}) = Z_1^2/Z_2$ iki değişkenli bir fonksiyon olsun. $f(\mathbf{Z})$ 'nin Hessian matrisi

$$\mathbf{H}_f = \begin{bmatrix} 2/Z_2 & -2Z_1/Z_2^2 \\ -2Z_1/Z_2^2 & 2Z_1^2/Z_2^3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

olarak hesaplanır. $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2]^T$ ve $Z_2 \geq 0$ için $\alpha^T \mathbf{H}_f \alpha = 2(\alpha_1 Z_2 - \alpha_2 Z_1)^2 / Z_2^3 \geq 0$ eşitsizliği geçerli olduğundan, $Z_2 \geq 0$ için $f(\mathbf{Z})$ 'nin dışbükey olduğu anlaşılır. Bu nedenle aşağıdaki Jensen eşitsizliği geçerlidir.

$$\frac{(\mathbb{E}\{Z_1\})^2}{\mathbb{E}\{Z_2\}} \leq \mathbb{E} \left\{ \frac{Z_1^2}{Z_2} \right\} \quad (14)$$

$Z_1 \triangleq G_{l,i}^\theta(N_i)$ ve $Z_2 \triangleq H_{l,i}^\theta(N_i)$ tanımları yapılsın. (9)'daki tanıma göre $H_{l,i}^\theta(N_i) \geq 0$, $\forall N_i, l, i, \theta$ geçerli olduğundan, (14)'teki eşitsizlik, her $p_{N_i}(\cdot)$, θ ve i için,

$$\frac{(\mathbb{E}\{G_{l,i}^\theta(N_i)\})^2}{\mathbb{E}\{H_{l,i}^\theta(N_i)\}} \leq \mathbb{E} \left\{ \frac{(G_{l,i}^\theta(N_i))^2}{H_{l,i}^\theta(N_i)} \right\} \quad (15)$$

halini alır. Bu durumda bütün i 'ler için (15) numaralı eşitsizlik geçerli olduğundan dolayı, her $p_{N_i}(\cdot)$ ve θ için

$$\sum_{i=0}^{M-1} \frac{(\mathbb{E}\{G_{l,i}^\theta(N_i)\})^2}{\mathbb{E}\{H_{l,i}^\theta(N_i)\}} \leq \mathbb{E} \left\{ \sum_{i=0}^{M-1} \frac{(G_{l,i}^\theta(N_i))^2}{H_{l,i}^\theta(N_i)} \right\} \quad (16)$$

sonucu çıkar. (16) numaralı eşitsizliğin sağ tarafı $\max_n \left\{ \sum_{i=0}^{M-1} (G_{l,i}^\theta(n))^2 / H_{l,i}^\theta(n) \right\}$ ifadesinden hiçbir zaman daha büyük olamayacağından ötürü önsavdaki sonuca ulaşılır. \square

Önsav 1, $p_{N_i}(n)$ için $\sum_{i=0}^{M-1} \frac{(\mathbb{E}\{G_{l,i}^\theta(N_i)\})^2}{\mathbb{E}\{H_{l,i}^\theta(N_i)\}}$ ile gösterilen

Fisher bilgisinin, her gürültü değerine göre $\sum_{i=0}^{M-1} \frac{(G_{l,i}^\theta(N_i))^2}{H_{l,i}^\theta(N_i)}$ ifadesinin en büyük değerini hiçbir zaman aşamayacağını göstermektedir. Başka bir deyişle, farklı gürültü değerleri arasında rastgeleleştirme, (11) numaralı ifadedeki fonksiyonu daha yüksek bir seviyeye ulaştırılmaz. Bu sonuç ile aşağıdaki önermeye varabilir.

Önerme 1: (11) numaralı ifadede geçen optimal gürültünün olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$n_l^{\text{opt}} = \arg \max_n \int_{\Lambda} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{(G_{l,i}^\theta(n))^2}{H_{l,i}^\theta(n)} d\theta \quad (17)$$

için $p_{N_i}^{\text{opt}}(n) = \delta(n - n_l^{\text{opt}})$ ile ifade edilebilir.

Kanıt: Kanıt için [13] numaralı çalışmadakine benzer bir yaklaşım kullanılmaktadır. Her $p_{N_i}(\cdot)$ için geçerli olan (16)

numaralı eşitsizlik aynı zamanda her θ için geçerli olduğundan, $p_{N_i}(\cdot)$ için aşağıdaki eşitsizlik çıkarılabilmektedir:

$$\int_{\Lambda} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{(\mathbb{E}\{G_{l,i}^\theta(N_i)\})^2}{\mathbb{E}\{H_{l,i}^\theta(N_i)\}} d\theta \leq \mathbb{E} \left\{ \int_{\Lambda} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{(G_{l,i}^\theta(n))^2}{H_{l,i}^\theta(n)} d\theta \right\} \quad (18)$$

Bu yüzden Denklem (11)'deki fonksiyonun en büyük değeri

$$\max_{p_{N_i}(\cdot)} \int_{\Lambda} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{(\mathbb{E}\{G_{l,i}^\theta(N_i)\})^2}{\mathbb{E}\{H_{l,i}^\theta(N_i)\}} d\theta \leq \max_{p_{N_i}(\cdot)} \mathbb{E} \left\{ \int_{\Lambda} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{(G_{l,i}^\theta(N_i))^2}{H_{l,i}^\theta(N_i)} d\theta \right\} \quad (19)$$

olarak üstten sınırlıdır. (19) numaralı ifadedeki üst sınır, en yüksek değerine $\max_n \left\{ \int_{\Lambda} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{(G_{l,i}^\theta(n))^2}{H_{l,i}^\theta(n)} d\theta \right\}$ ifadesine eşitken ulaştığından aşağıdaki sonuç elde edilir.

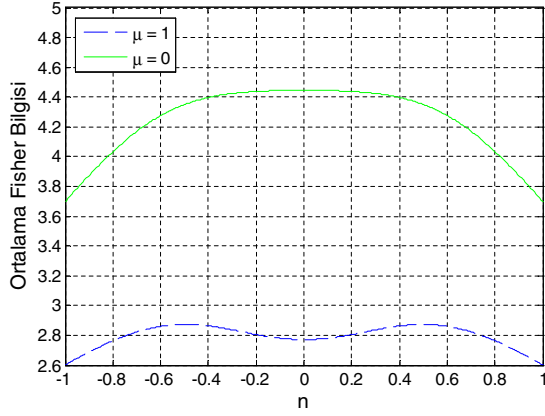
$$\begin{aligned} \max_{p_{N_i}(\cdot)} \int_{\Lambda} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{(\mathbb{E}\{G_{l,i}^\theta(N_i)\})^2}{\mathbb{E}\{H_{l,i}^\theta(N_i)\}} d\theta &\leq \max_n \left\{ \int_{\Lambda} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{(G_{l,i}^\theta(n))^2}{H_{l,i}^\theta(n)} d\theta \right\} \\ &= \int_{\Lambda} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{(G_{l,i}^\theta(n_l^{\text{opt}}))^2}{H_{l,i}^\theta(n_l^{\text{opt}})} d\theta \end{aligned} \quad (20)$$

Burada n_l^{opt} , Denklem (17)'de tanımlandığı gibidir. (20) numaralı eşitsizlikteki üst sınır, $p_{N_i}(n) = \delta(n - n_l^{\text{opt}})$ iken ulaşıldığından dolayı önermedeki sonuca varılır. \square

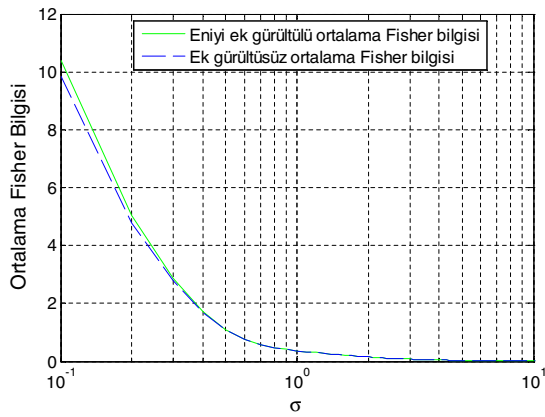
Önerme 1, ek gürültünün muhtemel bütün olasılık yoğunluk fonksiyonları içinde tek kütle noktasıyla gösterilen bir olasılık yoğunluk fonksiyonunun, yani sabit bir gürültünün, ortalama Fisher bilgisini enbüyüttüğünü belirtmektedir. Bu yüzden gözleme optimal gürültüyü eklemek, nicemleyicinin eşik değerlerini kaydırmak ile denktir. Bu da farklı gürültü değerleri arasında rastgeleleştirme gerektirmediğinden, basit bir işlemdir.

4. Sayısal Sonuçlar ve Yorumlar

Bir önceki bölümde elde edilen sonuçları örneklemek üzere $\gamma(x; \theta, \sigma^2) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right\}$ fonksiyonu tanımlanıp, Şekil 1'deki x gözleminin olasılık yoğunluk fonksiyonu $p_\theta^X(x) = 0.5\gamma(x; -\mu + \theta, \sigma^2) + 0.5\gamma(x; \mu + \theta, \sigma^2)$ olarak alınsın. Bu durumda $i = 0, 1, \dots, M-1$ için sadece tek gözlem bulunduğundan, Denklem (9)'daki $H_{l,i}^\theta(n)$ yerine $H_i^\theta(n) = F_\theta^X(\tau_{i+1} - n) - F_\theta^X(\tau_i - n)$ kullanılabilir. Burada $F_\theta^X(x)$, X 'in olasılık dağılım fonksiyonu olup, $F_\theta^X(x) = 0.5Q\left(\frac{-x+\mu+\theta}{\sigma}\right) + 0.5Q\left(\frac{-x-\mu+\theta}{\sigma}\right)$ olarak tanımlıdır ve $Q(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty e^{-0.5t^2} dt$ Q -fonksiyonunu ifade etmektedir. Ayrıca $H_i^\theta(n)$ 'nin θ 'ya göre türevi (10) numaralı tanımda yer alan $G_i^\theta(n)$ 'yi vermektedir. Bunun dışında bu örnekte kullanılan 4 seviyeli nicemleyici $\tau_1 = -1$, $\tau_2 = 0$ ve $\tau_3 = 1$ eşik değerlerine sahiptir ve θ için -2 ve 2 arasında birbiriçimli bir dağılım varsayılmıştır.



Şekil 2: n'ye göre ortalama Fisher bilgisi değerleri.

Şekil 3: σ 'ya göre ortalama Fisher bilgisi değerleri.

Önerme 1'e göre optimal gürültü değerinin sabit bir değer ile ifade edilebilmesi sayesinde, $\sigma = 0.3$ iken $\mu = 0$ ve $\mu = 1$ olduğu durumlarda ek gürültü değerine karşılık gelen ortalama Fisher bilgisi Şekil 2'de gösterilmiştir. Bu örneklerde $\mu = 0$ durumu için 4.447 değerini alan en büyük ortalama Fisher bilgisi, ek gürültü değeri sıfırken gözlemlenmektedir. Kısacası ek gürültü ile ortalama Fisher bilgisi artmamaktadır. Buna karşın, $\mu = 1$ olduğunda 2.872 değerini alan en büyük ortalama Fisher bilgisi $n = \pm 0.497$ iken görülür. Bu da ek gürültünün ortalama Fisher bilgisini geliştirdiğini göstermektedir. Ek gürültünün olmadığı durumda 2.769 değerini alan ortalama Fisher bilgisi, optimal gürültünün eklenmesiyle 2.872'ye çıkmıştır.

Ek gürültünün optimizasyon problemindeki olumlu etkisi, başka bir açıdan Şekil 3'te de görülmektedir. Burada σ değişken olarak alınmıştır ve σ 'ya karşılık gelen ortalama Fisher bilgisi grafikleri $\mu = 1$ için çizilmiştir. Yeşil (düz) eğri optimal ek gürültü ekliyen bulunan ortalama Fisher bilgisini, mavi (kesik) eğri de ortalama Fisher bilgisinin gürültü eklenmemiş halini göstermektedir. Bu şekilde görüldüğü üzere, $\sigma = 0.8$ 'den küçük değerler aldığında, nicemlenme öncesinde gözleme gürültü eklemek kazanç sağlamaktadır.

Sonuç olarak, Önerme 1'de açıklandığı üzere, optimal ek gürültünün sabit bir sinyalle gösterilebilmesi sayesinde, nicemleyicinin eşik değerlerini sabit bir değer ile kaydırarak, or-

talama Fisher bilgisini enbüyütmek mümkün olabilmektedir. Bu şekilde, farklı gürültü bileşenlerini rastgeleleştirmeye gerek kalmadan, ortalama Fisher bilgisi üst sınıra çekilebilir. Bu da pratik uygulamalar için oldukça kullanışlı bir sonuçtur.

5. Kaynakça

- [1] R. Benzi, A. Suter, A. Vulpiani, "The mechanism of stochastic resonance", J. Phys. A: Math. General, vol. 14, pp. 453–457, 1981.
- [2] L. Gammaitoni, P. Hanggi, P. Jung, F. Marchesoni, "Stochastic resonance", Rev. Mod. Phys., vol. 70, pp. 223–287, Jan. 1998.
- [3] S. Zozor, P.-O. Amblard, C. Duchene, "On pooling networks and fluctuation in suboptimal detection framework", Fluctuation and Noise Letters, vol. 7, no. 1, pp. L39–L60, 2007.
- [4] O. Dabeer, A. Karnik, "Signal parameter estimation using 1-bit dithered quantization", IEEE Trans. Information Theory, vol. 52, no. 12, pp. 5389–5405, Dec. 2006.
- [5] F. Chapeau-Blondeau, D. Rousseau, "Noise-enhanced performance for an optimal Bayesian estimator", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 52, no. 5, pp. 1327–1334, May 2004.
- [6] F. Chapeau-Blondeau, "Noise-aided nonlinear Bayesian estimation", Physical Review E, vol. 66, no. 3, pp. 1–3, Sep. 2002.
- [7] H. Chen, P. K. Varshney, J. H. Michels, "Noise enhanced parameter estimation", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 56, pp. 5074–5081, Oct. 2008.
- [8] S. Marano, V. Matta, P. Willett, "Quantizer precision for distributed estimation in a large sensor network", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 54, no. 10, pp. 4073–4078, Oct. 2006.
- [9] H. C. Papadopoulos, G. W. Wornell, A. V. Oppenheim, "Sequential signal encoding from noisy measurements using quantizers with dynamic bias control", IEEE Trans. Information Theory, vol. 47, no. 3, pp. 978–1002, 2001.
- [10] A. Ribeiro, G. B. Giannakis, "Bandwidth-constrained distributed estimation for wireless sensor networks – Part II: Unknown probability density function", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 54, no. 7, pp. 2784–2796, July 2006.
- [11] D. Rousseau, F. Duan, F. Chapeau-Blondeau, "Suprathreshold stochastic resonance and noise-enhanced Fisher information in arrays of threshold devices", Physical Review E, vol. 68, no. 3, pp. 1–10, Sep. 2003.
- [12] D. Rousseau, G. V. Anand, F. Chapeau-Blondeau, "Non-linear estimation from quantized signals: Quantizer optimization and stochastic resonance", 3rd International Symposium on Physics in Signal and Image Processing, pp. 89–92, Grenoble, France, Jan. 2003.
- [13] G. O. Balkan, S. Gezici, "CRLB based optimal noise enhanced parameter estimation using quantized observations," IEEE Signal Processing Letters, vol. 17, no. 5, pp. 477–480, May 2010.
- [14] Harry L. Van Trees, Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I, Wiley-Interscience, 2001.