

# Parçalı Sürekli Sinyallerde Parametrik Modelleme ile Gürültü Bastırımı

## Signal Denoising by Piecewise Continuous Polynomial Fitting

Aykut Yıldız<sup>1</sup>, Orhan Arıkan<sup>1</sup>

1. Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü

Bilkent Üniversitesi

{ayildiz,oarikan}@ee.bilkent.edu.tr

### Özetçe

*Parçalı sürekli yapıdaki sinyallerin üzerindeki gürültünün bastırımı amacıyla parçacık sürüsü optimizasyon tekniğinin kullanıldığı bir teknik geliştirilmiştir. Model sinyal olarak parçaların başlangıç noktaları ve her bir parçanın az sayıda parametreyle tanımlandığı bir sinyal kümesi kullanılmıştır. Parça sayısı verince parçalar arasındaki optimal geçiş sınırları Parçacık Sürüsü Optimizasyonu(PSO) ile bulunur. Her bir parça içerisindeki sinyal parametreleri ise optimal geçiş sınırlarına bağlı olarak en büyük olabilirlik kestirimiyle elde edilir. Önerilen algoritma geçiş sınırlarının sayısı bilinmediği duruma da genelleştirilmiştir. Sıklıkla kullanılan ve başarımları yüksek diğer tekniklerle yapılan kıyaslama sonunda önerilen Başarımları yüksek tekniklerle yapılan kıyaslama sonucunda önerilen tekniğin önemli başarımları sağladığı gösterilmiştir.*

### Abstract

*Piecewise smooth signal denoising is cast as a non-linear optimization problem in terms of transition boundaries and a parametric smooth signal family. Optimal transition boundaries for a given number of transitions are obtained by using particle swarm optimization. The piecewise smooth section parameters are obtained as the maximum likelihood estimates conditioned on the optimal transition boundaries. The proposed algorithm is extended to the case where the number of transition boundaries are unknown by sequentially increasing number of sections until the residual error is at the level of noise standard deviation. Performance comparison with the state of the art techniques reveals the important advantages of the proposed technique.*

### 1. Giriş

Sinyallerde gürültü bastırımı sinyal analizinin yaygın bir uygulamasıdır. Verimli olarak gürültü bastırımını gerçekleştirmek için kullanılan birçok sinyal modeli mevcuttur. Yaygın olarak kullanılan bir model ise parçasal polinom modelidir. Bu modele göre sinyal

polinomsal parçalara bölünebilir. Bu model özel durum olarak parçalı sabit modelleri de içerir. Bölme sayısı ve sınırlar bilindiğinde bu model çok etkili gürültü bastırımı sağlayabilir. Ancak, tipik olarak, bölme sayısı da bölmelerin arasındaki sınırlar da bilinmez. Geçiş sınırlarının optimal olarak seçimi karmaşık bir minimum yapısına sahip bir optimizasyon probleminin çözümünü gerektirir. Bu bildiride bu amaçla Parçacık Sürüsü Optimizasyonu(PSO) tekniği kullanılmıştır. Bu teknik bölme sayısı verildiğinde geçiş sınırlarını ve her bir parçanın polinomsal modelini bulmaktadır. Parça sayısını belirlemek amacıyla parça sayısı artık sinyalin seviyesi gürültü seviyesine ulaşıncaya kadar aşamalı olarak artırılır.

Gürültülü sinyallere polinom oturtma sinyal işleme ve sayısal analiz konularında yaygın olarak kullanılan bir araçtır. Örneğin [1]'de polinom oturtma metodu aradeğerleme amacıyla kullanılmıştır. Uzun sinyallerde sadece bir polinom kullanılarak elde edilen ara değerlendirme sonuçlarında gözlemlenen başarımların düşüşünü azaltmak amacıyla parçalı polinom tanımlarının kullanılmasının uygun olacağı [1]'de belirtilmiştir. Ancak parçaların sınırlarının optimal olarak tespiti yapılamamıştır. Polinom oturtmanın bu bildirideki gibi sinyal yumuşatma ve kestirim alanında kullanıldığı bir çalışma ise [2]'dir. Ancak bu çalışmada kullanılan oturtma yöntemi en küçük kareler anlamında optimal değildir. Optimal en küçük kareler oturtmasının yapıldığı başka bir teknik ise [3]'dir. Ancak burada kayan bir pencerede en küçük kareler polinom oturtması yapılır ve sadece ortadaki nokta alınıp sonuç sinyaline konulur. Her nokta için ayrı bir polinom oturtma yapıldığı için teknik yavaş bir tekniktir.

Toplam değişim [4] 1-Boyutta ve 2-Boyuttaki gürültü bastırımı konusunda yaygın olarak kullanılan bir gürültü bastırım tekniğidir. Toplam değişim tekniğinde, toplam değişimi azalan bir dizi sinyal elde edilir ve bu dizideki her sinyal, diğer aynı toplam değişime sahip sinyaller arasında gürültülü sinyale en iyi oturandır. Gürültüsü kaldırılan sinyal, elde edilen sinyal dizisi arasında uyum hatasının istatistiksel olarak gürültü standart sapmasıyla karşılaştırılmasıyla elde edilir. Bu süreç üzerine bir

değişiklik [5]'de verilmiştir.

Bir başka 1-Boyutlu gürültü bastırma tekniği ise Ana Eğri İzdüşümüdür [6]. Bu teknikte ana eğrinin en büyük olabilirliği 2-Boyutlu olasılık dağılımının en büyük değeri olarak bulunmuştur. Sonra da bu en büyük olabilirlik fonksiyonunun ana eğriye olan izdüşümü bulunmuştur. Ancak bu teknik polinomsal bir model kullanılmamaktadır.

Bildirinin 2.Bölümünde önerilen teknik detaylandırılmıştır. 3.Bölümde ise simülasyon tabanlı karşılaştırma sonuçlarına yer verilmiştir. 4.Bölümde, elde edilen sonuçlar ve olası iyileştirmeler verilmiştir.

## 2. Önerilen Gürültü Bastırma Tekniği

Burada önerilen tekniğin amacı parçalı polinomlardan oluşan bir sinyalin üstündeki gürültünün bastırılmasıdır. Bu problemi matematiksel olarak ifade etmek için bu bölümde  $N$  örnek uzunluğundaki gürültülü parçalı polinom sinyaline  $f[n]$  denmiştir. Bu sinyalin geçiş sınırları ise  $0 < e_1 < e_2 \dots < e_D < N - 1$ , şeklinde ifade edilebilir. Bu sınırlar arasında sinyal gürültülü bir polinom sinyalidir. Bu gürültülü sinyale geçiş sınırları arasında polinomsal bir model uydurulması için aşağıdaki parçalı sinyal kullanılacaktır.

$$\hat{f}[n; \mathbf{a}, \mathbf{e}] = a_{0,i} + a_{1,i}n + \dots + a_{k,i}n^k, e_i \leq n < e_{i+1}. \quad (1)$$

Burada  $\mathbf{a}$  polinom katsayı vektörü,  $\mathbf{e}$  geçiş sınırları vektörü,  $k$  ise polinom derecesidir. Bu gürültü bastırmanın hedefi bir optimizasyon problemi olarak ifade edilebilir. Normal dağılımlı beyaz gürültü varsayımı altında verilen gürültülü sinyale en yüksek olabilirlik uyumunu sağlayan  $\hat{f}[n; \mathbf{a}, \mathbf{e}]$  sinyali aşağıdaki optimizasyon probleminin çözümü olarak ifade edilebilir:

$$\min_{\mathbf{e}} \left[ \min_{\mathbf{a}} \sum_{n=0}^{N-1} |f[n] - \hat{f}[n; \mathbf{a}, \mathbf{e}]|^2 \right]. \quad (2)$$

Bu ifadede yer alan  $\mathbf{a}$  üzerinden optimizasyon verilen bir  $\mathbf{e}$  için kolaylıkla bulunabilir. Dolayısıyla gerekli olan optimizasyon sadece  $\mathbf{e}$  üzerinden bir optimizasyon probleminin çözümü olarak elde edilebilir. Aşağıda önce belirli bir  $\mathbf{e}$  için en iyi polinomsal yaklaşımın nasıl bulunacağı detaylandırılmaktadır. Bunu takiben sadece  $\mathbf{e}$ 'ye dayalı bir bedel işlevi bulunacaktır.

Verilen bir  $\mathbf{e}$  için en iyi uyumu sağlayan polinomsal yaklaşım aşağıdaki optimizasyon probleminin çözümü olarak elde edilebilir:

$$\min_{\mathbf{a}_i} \sum_{n=e_i}^{e_{i+1}-1} |f[n] - (a_{0,i} + a_{1,i}n + \dots + a_{k,i}n^k)|^2 \quad (3)$$

Burada  $i$ , 0 ile  $D$  arasındadır.  $e_0 = 0$ ,  $e_{D+1} = N$  olarak sabitlemiştir. Polinom derecesi  $k$  bilindiğinde  $\mathbf{a}$

vektörünü veren en küçük kareler polinom oturtmasının tek çözümü şöyle bulunabilir:

$$\mathbf{a}_i = (\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{A}_i^T \mathbf{f}_i. \quad (4)$$

Burada  $\mathbf{a}_i$   $i$ . parça için bulunan polinom katsayısı vektörüdür.  $\mathbf{f}_i$  ise gürültülü sinyalin  $i$ . parçasıdır.  $\mathbf{A}_i$  ise şöyle tanımlıdır:

$$\mathbf{A}_i = [ \mathbf{1} \quad \mathbf{n} \quad \dots \mathbf{n}^k ]. \quad (5)$$

Burada  $\mathbf{n}$ ,  $e_i \leq n_j < e_{i+1}$  elemanlarına sahip sinyal indekslerinden oluşan sütun vektörüdür.

$i$ . bölümdeki en iyi polinom oturtmanın maliyeti  $J_i(\mathbf{f}, \mathbf{e})$  aşağıdaki şekilde bulunabilir:

$$J_i(\mathbf{f}, \mathbf{e}) = \left\| (\mathbf{I} - (\mathbf{A}_i^T \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{A}_i^T) \mathbf{f}_i \right\|^2. \quad (6)$$

Verilen bir  $\mathbf{e}$  için en iyi uyum hatası  $\sum_{i=1}^D J_i(\mathbf{f}, \mathbf{e})$ 'dir. Dolayısıyla Dnk. 2'deki optimizasyon problemi olarak sadece  $\mathbf{e}$  üzerinden bir optimizasyona indirgenebilir.

$$\min_{\mathbf{e}} \sum_{i=0}^D J_i(\mathbf{f}, \mathbf{e}). \quad (7)$$

İndirgenmiş optimizasyon problemi orijinal probleme göre çok daha az değişkene sahiptir. Halbuki, maliyet fonksiyonu tipik olarak karmaşık bir minimum yapısına sahiptir. Bu da en iyi çözümün bir yerel optimizasyon tekniğiyle bulunmasını zorlaştırır. Bu nedenle, geçiş sınırlarını bulmak için gereken küresel optimal çözüm bu çalışmada Parçacık Sürüsü Optimizasyon tekniği [7] ile bulunmuştur.

PSO döngüsünde her birisi bir çözüm adayı olan  $N_p$  sayıda parçacıktan oluşan bir sürü kullanılır. Her bir parçacık elemanları geçiş sınırları için pozisyon adayı olan  $D$  uzunluğundaki vektörlerdir. Başlangıç olarak rastgele belirlenmiş  $N_p$  vektörden oluşan bir popülasyon seçilir. Her bir parçacık içerisindeki geçiş sınırları küçükten büyüğe dizilir. Ondan sonra yeni popülasyonlar oluşturmak için aşağıdaki PSO güncelleme denklemleri [7] kullanılır:

$$\mathbf{v}^{p,t+1} = \alpha(\mathbf{v}^{p,t} + w_1 \zeta_1 (\mathbf{e}_{pb}^{p,t} - \mathbf{e}^{p,t}) + w_2 \zeta_2 (\mathbf{e}_{gb}^t - \mathbf{e}^{p,t})), \quad (8)$$

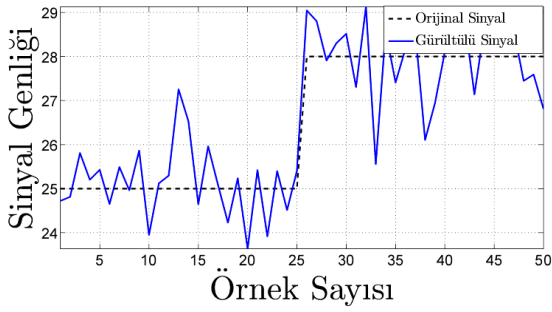
$$\mathbf{e}^{p,t+1} = \mathbf{e}^{p,t} + \mathbf{v}^{p,t}. \quad (9)$$

Bu denklemlerde,  $\mathbf{v}^{p,t}$   $p$ 'inci parçacığın hız vektörüdür,  $\mathbf{e}^{p,t}$  ise  $p$ 'inci parçacığın pozisyonudur.  $\mathbf{e}_{gb}^t$   $t$  anına kadar tüm parçacıklara ait en iyi pozisyonudur.  $\mathbf{e}_{pb}^{p,t}$  ise tüm süreç boyunca  $p$ 'inci parçacığa ait en iyi pozisyonudur.  $\zeta_1$  ve  $\zeta_2$   $[0, 1]$  arasına bağımsız özdeş birbiriçimli dağılmış

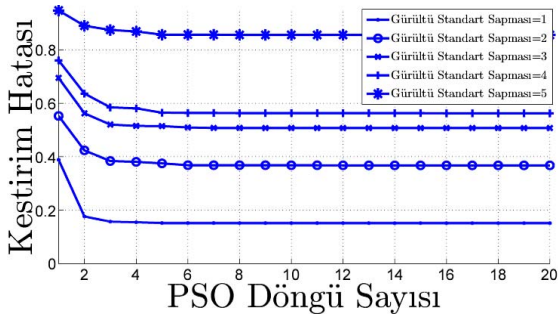
bir rastgele değişkendir.  $\alpha$ ,  $w_1$  ve  $w_2$  ise yakınsamayı garanti edecek en küçük değer olarak seçilir [8]. Burada  $e^{p,t}$  güncellenirken o parçacığın o ana kadarki optimal pozisyonunun hesaba katılması,  $\zeta_1$  ve  $\zeta_2$ 'nin rastgele olması çeşitliliği artırır ve küresel optimal pozisyona yakınsama olasılığını artırır.

### 3. Önerilen Tekniğin Diğer Tekniklerle Karşılaştırılması

Bu kısımda önerilen teknik literatürdeki başarımı yüksek diğer tekniklerle karşılaştırılacaktır. Önerilen yöntem önce parçalı sabit sinyallerin gürültüsünü bastırmak amacıyla kullanılan [9]'daki toplam değişim yöntemi ile kıyaslanacaktır. Çok sayıda polinom parçasından oluşan sinyal durumu için ise [4] ve [6] gibi daha genel tekniklerle karşılaştırma yapılacaktır. Şekil 1'de gösterilen sinyal için 5 ayrı gürültü değerinde simülasyonlar yapılmıştır. Şekil 2 ve 3'te gösterilen sonuçların kıyaslaması, önerilen tekniğin toplam değişimden daha etkili bir gürültü bastırımı sağladığını göstermektedir.

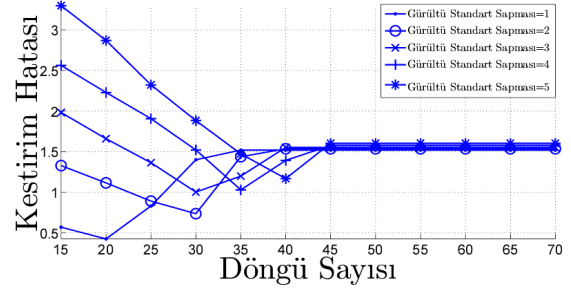


Şekil 1: Gürültülü kısmi parçalı sabit sinyal

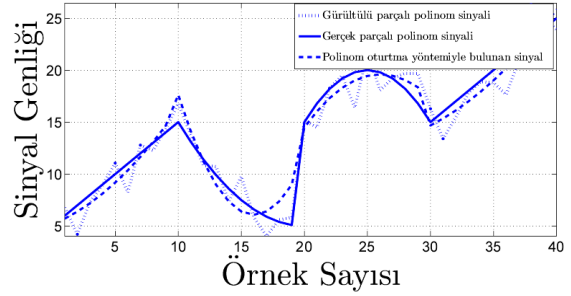


Şekil 2: Önerilen PSO tabanlı teknikle beş farklı gürültü seviyesi için orijinal sinyalin kestirimindeki hatası

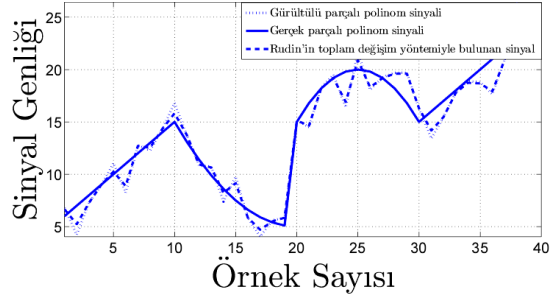
Orijinal sinyalin dört polinom kısmından oluştuğu daha karmaşık bir durum için elde edilen sonuçlar Şekil 4'te gösterilmiştir. Önerilen tekniğin performansı Rudin'in parçalı sabit parçalar içermeyen sinyaller için de gürültü bastırımını sağlayabilen toplam değişim



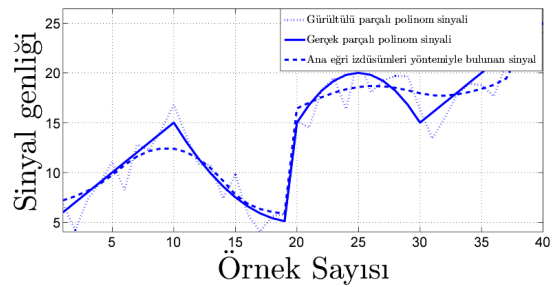
Şekil 3: Toplam değişim tekniğinin beş farklı gürültü seviyesi için orijinal sinyalin kestirimindeki hatası



Şekil 4: Önerilen teknikle elde edilen gürültü bastırımı sonucu



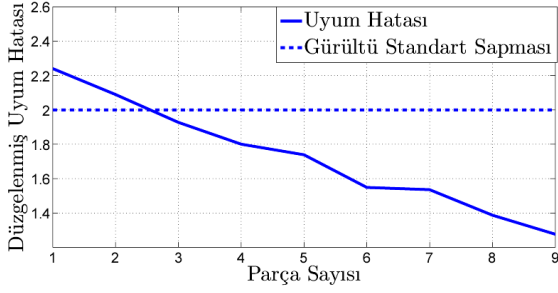
Şekil 5: Rudin tekniğinin üç sınırlı gürültülü bir sinyale uygulanmasıyla elde edilen sonuç sinyali



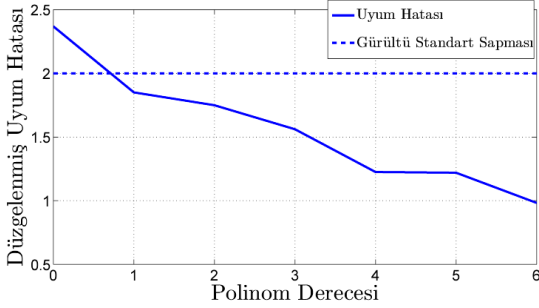
Şekil 6: Ana eğri izdüşümü tekniğinin üç sınırlı gürültülü bir sinyale uygulanmasıyla elde edilen sonuç sinyali

tekniğiyle ve parametrik olmayan ana eğri izdüşümü tekniğiyle [6] karşılaştırılmıştır.

Elde edilen gürültü bastırımı sonuçları Şekil 4-6'deki gibidir. Bu şekillerde ve Tablo 1'de görüldüğü gibi, önerilen teknik orijinal sinyalin daha iyi bir kestirimini sağlamaktadır. Tekniğin ana eğri izdüşümü yönteminden



Şekil 7: Geçiş sınırı sayısı  $D$ 'ye karşılık uydurma hatasının grafiği



Şekil 8: Polinom derecesi  $k$ 'ye göre uyum hatasının grafiği

daha iyi çalışmasının sebebi ise önerilen tekniğin kullandığı parçalı polinomsal yapıya uygun bir sinyalin analiz edilmesidir. Bu modele uygun sinyallerde önerilen teknik bu modeli kullanmayan modellere göre beklendiği gibi üstünlük sağlamaktadır.

Şekil 7'de gösterildiği gibi kestirilmiş polinom sinyalinin aşağıda verilen düzgelennmiş uyum hatası  $D$ 'nin fonksiyonu olarak tekdüze azalır.

$$E = \sqrt{\frac{\sum_{n=0}^{N-1} |f[n] - \hat{f}[n; \mathbf{a}, \mathbf{e}]|^2}{N}} \quad (10)$$

Bu uyum hatası gürültü standart sapmasının altına düşene kadar polinom derecesi  $D$  artırılabilir. Aynı düşünceyle her parça için polinom derecesi  $k_i$ , o bölmedeki düzgelennmiş uyum hatası gürültü standart sapmasının altına düşünceye kadar azaltılabilir. Bir parçadaki polinom derecesi  $k$ 'ya göre uyum hatası 8'deki gibidir.

Teknik	Hata Büyüklüğü
Rudin'in Toplam Değişimi	1.3754
Ana Eğri İzdüşümleri	1.1866
Polinom uyumu	1.0859

Tablo 1: Üç parçalı sinyal için hata büyüklükleri

## 4. Sonuçlar

Bu bildiriye, parçalı polinom modeline yönelik klasik gürültü bastırımı problemi için polinom parçalarının derecesini belirlemek amacıyla geliştirilen yöntem başarılı sonuçlar üretmiştir. Önerilen teknikte, polinom kısımların sınırları hızlı yakınsayan PSO tekniği kullanılarak bulunmuştur. En büyük olabilirlik yönünden optimal çözüm üreten önerilen gürültü bastırım tekniğinin gürbüz bir performansa sahip olduğu ve toplam değişim yöntemine göre başarımının daha yüksek olduğu simülasyonlar kullanılarak gösterilmiştir.

## 5. Kaynakça

- [1] M. T. Heath, *Scientific Computing*. New York: McGraw-Hill, 1997.
- [2] V.G.Spokoiny, "Estimation of a function with discontinuities via polynomial fit with an adaptive window choice," *The annals of statistics*, 1998.
- [3] A. Savitzky and M. Golay, "Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures," *Analytic Chemistry*, vol. 36, pp. 1627–1639, 1994.
- [4] L. I. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi, "Nonlinear total variation based noise removal algorithms," *Physica D*, vol. 60, pp. 259–268, 1992.
- [5] S. Didas, "Higher order variational methods for noise removal in signals and images," Ph.D. dissertation, Saarland Univ., Saarbrücken, Germany, 2004.
- [6] U. Ozertem, D.Erdogmus, and O.Arikan, "Piecewise smooth signal denoising via principal curve projections," *IEEE Workshop on Machine Learning for Signal Processing*, October 2008.
- [7] D. Bratton and J. Kennedy, "Defining a standard for particle swarm optimization," *Proceedings of the 2007 IEEE Swarm Intelligence Symposium (SIS 2007)*, 2007.
- [8] M.Clerc and J.Kennedy, "The particle swarm- explosion, stability, and convergence in a multidimensional complex space," *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 6, pp. 58–73, 2002.
- [9] I. Pollak and A. S. Willsky, "Nonlinear evolution equations as fast and exact solvers of estimation problems," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 53, pp. 484–498, 2005.
- [10] S.-H. Lin, Y.-M. Yeh, and B. Chen, "Exploiting polynomial fit histogram equalization and temporal average for robust speech recognition," *Interspeech*, pp. 1–18, 2006.
- [11] D. Sha and C. Hsu, "A hybrid particle swarm optimization for job shop scheduling problem," *Computers, Industrial Engineering 2006*, vol. 51, pp. 791–808, 2006.
- [12] F. van den Bergh and A. P. Engelbrecht, "Cooperative learning in neural networks using particle swarm optimizers," *South African Comput. J.*, vol. 26, pp. 84–90, 2000.