

Optimal Stokastik İşaretleme ve Sezici Rasgeleştirme Üzerine Bir Derleme

A Survey on Optimal Stochastic Signaling and Detector Randomization

Berkan Dülek, Çağrı Göken, Sinan Gezici, Orhan Arıkan

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Bilkent Üniversitesi, Bilkent, Ankara 06800, Türkiye
{dulek, goken, gezici, oarikan}@ee.bilkent.edu.tr

Özetçe

Bu bildiri, ortalama güç kısıtlı ikili iletişim sistemleri için stokastik işaretleme ve sezici rasgeleştirme yöntemlerinin bir derlemesi sunulmaktadır. Öncelikle, alıcıda bir adet sabit sezicinin bulunduğu durum ele alınmakta, daha sonra optimal işaretleme ve buna karşılık gelen sezicinin birlikte tasarlandığı durum çalışılmaktadır. Ayrıca, alıcıda birden çok sezicinin bulunduğu, seziciler arasında rasgeleleştirmenin yapılabildiği ve her seziciye gönderilen semboller için stokastik işaretleminin mümkün olduğu durum ele alınmaktadır. Sezicilerde MAP kuralı kullanıldığında, sezici rasgeleştirme ile ulaşılan ortalama hata olasılığının, stokastik işaretleme ile ulaşılan ortalama hata olasılığından daha büyük olamayacağı gözlemlenmektedir. Son olarak, sayısal bir örnek sunulmaktadır.

Abstract

In this paper, a survey on stochastic signaling and detector randomization is presented for average power-constrained binary communications systems. First, the case of a single fixed detector at the receiver is considered, and then the joint design of detector and optimal signaling is studied. In addition, the optimal receiver design is examined in the presence of detector randomization and stochastic signaling. It is observed that the average probability of error achieved via detector randomization cannot be larger than that achieved via stochastic signaling in the presence of optimal MAP detectors. Finally, a numerical study is presented to illustrate an example.

1. Giriş

Gauss'tan farklı gürültü altında çalışan iletişim kanallarında [1], her sembole karşılık olarak deterministik işaret yerine stokastik işaret kullanımı, ortalama hata olasılığının düşürülmesine yardımcı olabilmektedir [2, 3]. Alıcıda tek bir sezicinin olduğu ve bu sezicinin sabit kabul edildiği durum, ikinci ve dördüncü moment kısıtları altında [2] numaralı çalışmada ele alınmaktadır. Ayrıca, ortalama bir güç kısıtı altında optimal sezici ve buna karşılık kullanılacak optimal işaretlerin ortak tasarımı konusu [3]'te çalışılmaktadır. Bu çalışmada, optimal çözümün en fazla iki işaret değeri arasında rasgeleştirme ve alıcıda buna karşılık gelen maksimum sonsal olasılık (MAP) kuralı sezicinin kullanılmasıyla elde edilebileceği gösterilmektedir.

Benzer gürültü koşulları altında, performansı artırmak için kullanılan diğer bir yöntem de sezici rasgeleleştirmedir [4]. Bu yaklaşım, alıcıda belirli olasılıklarla farklı sezicilerin kullanılmasına dayanmaktadır. Bu durumda optimal sezici tasarımı ve rasgeleleştirmesi, alıcıda yer alan her sezici için verici tarafından yayınlanan işaretlerin deterministik olması koşulu altında [4]'te çalışılmakta ve iki deterministik işaret çifti ile bunlara karşılık gelen iki adet MAP kuralı sezici arasında yapılacak bir rasgeleleştirmenin optimal olduğu gösterilmektedir.

Optimal sezicilerin, seziciler arası optimal rasgeleştirme oranlarının ve sezicilere özgü optimal stokastik işaretlerin ortak tasarımı konusu ilk olarak [5]'te ele alınmaktadır. Diğer bir deyişle, bu çalışmada en genel problem olan, alıcıda birden çok sezicinin bulunduğu, seziciler arasında rasgeleleştirmenin yapılabildiği ve her seziciye gönderilen semboller için stokastik işaretleminin mümkün olduğu durum ele alınmaktadır. Öncelikle, sezicilerde MAP kuralı kullanılması

şartıyla, sadece stokastik işaretleme (sezici rasgeleştirme olmaksızın) kullanılarak elde edilebilecek en düşük ortalama hata olasılığının, sadece sezici rasgeleştirme (stokastik işaretleme olmaksızın) kullanılarak elde edilebilecek en düşük ortalama hata olasılığından her zaman daha yüksek olduğu gösterilmektedir. Bu sonuca ve bazı ek analizlere dayanarak, en genel problemin optimal çözümünün iki adet deterministik işaret vektörüne karşılık gelen MAP kuralı iki adet sezici arasında rasgeleştirme olduğu gösterilmektedir.

Bu derlemede, [2]-[6] numaralı çalışmalar temel alınarak, çeşitli senaryolarda optimal stokastik işaretleme ve sezici rasgeleştirme incelenmektedir. Ayrıca sayısal bir örnek sunulularak, farklı işaretleme ve rasgeleştirme teknikleri, ortalama hata performansı açısından karşılaştırılmaktadır.

2. Problem Tanımı

İkili bir iletişim sisteminde alıcı, toplam gürültü kanalı üzerinden sayıl ölçümler elde etmektedir. Alıcı, en çok K adet farklı sezici (karar kuralı) arasında rasgeleştirme veya zaman paylaşımı yapabilmektedir. Belirli bir anda, alıcıda bulunan K adet seziciden sadece biri hangi sembolün gönderilmiş olduğu hakkında karar vermek için kullanılabilir. Sezici rasgeleştirme sırasında vericinin, alıcıda o anda hangi sezicinin kullanıldığını bildiği varsayılmaktadır. Ayrıca, sezici rasgeleleştirmeye ek olarak stokastik işaretleme (rasgeleştirme) yöntemi de kullanılmaktadır. Bu sebeple, toplam gürültü kanalı üzerinden her bir seziciye ikili sembollere karşılık olarak gönderilen işaretler, rassal değişken olarak modellenmektedir [5].

Stokastik işaretleme ve sezici rasgeleştirme bir arada düşünüldüğünde, sezici i 'de gözlemlenen sayıl ölçüm aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir:

$$Y = S_j^{(i)} + N, \quad j \in \{0, 1\} \text{ ve } i \in \{1, \dots, K\}. \quad (1)$$

Burada Y gürültülü ölçümü, $S_0^{(i)}$ ve $S_1^{(i)}$ sırasıyla 0 sembolü ve 1 sembolü için sezici i 'ye gönderilmiş sayıl değerlerini ve N ise $S_j^{(i)}$ 'den bağımsız olan gürültüyü simgelemektedir. Ayrıca π_0 ve π_1 şeklinde gösterilen önsel olasılıkların da bilindiği varsayılmaktadır.

Gönderilen sembolü sezimlemek için alıcıda kullanılan K adet karar kuralı, en genel duruma uygun olarak şu şekilde ifade edilebilir: $\phi^{(i)}(y) = j$, eğer $y \in \Gamma_j^{(i)}$. Burada $\Gamma_0^{(i)}$ ve $\Gamma_1^{(i)}$ sırasıyla, 0 sembolü ve 1 sembolü için sezici i 'nin karar bölgelerini simgelemektedir [7]. Alıcı, ortalama hata olasılığının mümkün olan en düşük değere çekmek için K adet sezici arasında her türlü oranda rasgeleştirme ya da zaman paylaşımı uygulayabilir. Sezici $\phi^{(i)}$ için kullanılan rasgeleştirme oranı v_i ile ifade edilirse ($\sum_{i=1}^K v_i = 1$ ve tüm $i = 1, \dots, K$ için $v_i \geq 0$), ortalama hata olasılığı $P_e = \sum_{i=1}^K v_i P_e^{(i)}$ şeklinde hesaplanır. Burada, $i = 1, 2, \dots, K$ için $P_e^{(i)} = \sum_{j \in \{0,1\}} \pi_j \int_{\Gamma_{1-j}^{(i)}} p_j^{(i)}(y) dy$ ifadesi,

sezici i için ortalama hata olasılığını verir. $p_j^{(i)}(y)$ ise sezici i tarafından alınmak üzere sembol j 'nin gönderildiği zamanki koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunu (OYF) simgelemektedir. Ayrıca, stokastik işaretleme ele alındığı için, (1)'deki $S_j^{(i)}$, rassal değişken olarak modellenmektedir. Sinyal ve

gürültü birbirinden bağımsız olduğu için, ölçümlerin koşullu OYF'leri, $p_j^{(i)}(y) = \int_{\mathbb{R}} p_{S_j^{(i)}}(x) p_N(y-x) dx = \mathbb{E}\{p_N(y - S_j^{(i)})\}$ şeklinde hesaplanabilir. Buradaki beklenti işlemi, $S_j^{(i)}$ 'lerin OYF'leri üzerinden hesaplanmaktadır [5]. Stokastik işaretlemenin her seziciye özgü olarak tasarlandığı durumda, ortalama hata olasılığı şu şekilde ifade edilmektedir:

$$P_e = \sum_{i=1}^K v_i \left(\sum_{j \in \{0,1\}} \int_{\Gamma_{1-j}^{(i)}} \pi_j \mathbb{E}\{p_N(y - S_j^{(i)})\} dy \right). \quad (2)$$

Pratik sistemlerde vericiden yayınlanan ortalama güç kısıtlıdır. Bu durum, stokastik işaretleme ve sezici rasgeleştirme çatısında aşağıdaki gibi ifade edilebilir [7]:

$$\sum_{i=1}^K v_i \left(\sum_{j \in \{0,1\}} \pi_j \mathbb{E}\{|S_j^{(i)}|^2\} \right) \leq A. \quad (3)$$

Burada A, ortalama güç sınırındır.

Tasarımdaki temel amaç, sezicileri, seziciler arası rasgeleştirme oranlarını ve sezicilere özgü stokastik işaretleri ortak bir şekilde tasarlayarak ortalama hata olasılığını en küçük değerine düşürmektir [5]. Matematiksel olarak ifade edilirse, eniyileme uzayı $\mathcal{U} = \{\phi^{(i)}, v_i, p_{S_0^{(i)}}, p_{S_1^{(i)}}\}_{i=1}^K$ iken amaç, aşağıdaki eniyileme problemini çözmektir:

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{U}} \sum_{i=1}^K v_i \left(\sum_{j \in \{0,1\}} \int_{\Gamma_{1-j}^{(i)}} \pi_j \mathbb{E}\{p_N(y - S_j^{(i)})\} dy \right) \\ \text{öyle ki } \sum_{i=1}^K v_i \left(\sum_{j \in \{0,1\}} \pi_j \mathbb{E}\{|S_j^{(i)}|^2\} \right) \leq A \\ \sum_{i=1}^K v_i = 1, \quad v_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, K\}. \quad (4) \end{aligned}$$

Burada $p_{S_j^{(i)}}(\cdot)$ 'ler birer OYF olduklarından OYF'lere ait aşağıdaki genel şartların da sağlanması gerekmektedir: $p_{S_j^{(i)}}(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, ve $\int_{\mathbb{R}} p_{S_j^{(i)}}(x) dx = 1, \forall j \in \{0, 1\}$ ve $\forall i \in \{1, \dots, K\}$.

3. Optimal İşaretleme ve Optimal Sezici Rasgeleştirme

Denklem (4)'te tanımlanan eniyileme problemi, hem stokastik işaretleme hem de sezici rasgeleştirme içerdiği için genel bir çerçeve sunmaktadır [5]. Örneğin, alıcıda tek bir sezicinin olduğu ve bu sezicinin sabit kabul edildiği durum ($K = 1$ ve sabit sezici) [6]'da incelenmiştir. Yine alıcıda tek bir sezicinin olduğu durumda, optimal işaretleme ile optimal sezicinin ortak tasarımı konusu ($K = 1$ ve optimal sezici) [3]'te ele alınmaktadır. Alıcıda birden çok sezicinin olduğu ancak her sezici için verici tarafından sembollere karşılık yayınlanan işaretlerin sabit olduğu durumda ($K \geq 2$ ve deterministik işaretleme), optimal sezici tasarımı ve rasgeleştirmesi [4]'te çalışılmıştır. En genel problem olarak, alıcıda birden çok sezicinin bulunduğu, seziciler arasında rasgeleleştirmenin yapılabildiği ve her seziciye gönderilen semboller için stokastik işaretlemenin mümkün olduğu durum ise ($K \geq 2$ ve stokastik işaretleme), [5]'te incelenmektedir. Bu bölümde, bahsedilen durumlarla ilgili olarak elde edilen sonuçlar ele alınmaktadır.

3.1. Klasik İşaretleme

Bu kısımda, (4)'teki genel problemin özel bir durumu olarak, alıcıda tek ve sabit bir sezicinin olduğu, vericide ise deterministik işaretleme yapıldığı varsayılmaktadır. Tek bir sezici kullanıldığında, (3)'te verilen ortalama güç kısıtlaması aşağıdaki ifadeye indirgenir:

$$\pi_0 |S_0|^2 + \pi_1 |S_1|^2 \leq A. \quad (5)$$

Burada, S_0 ve S_1 sırasıyla 0 ve 1 sembolleri için vericiden sabit alıcıya yollanan sinyal değerlerini simgelemektedir. Klasik işaretleme tasarımı, deterministik S_0 ve S_1 işaretlerinin alacakları değerler, (5)'teki kısıt altında, sinyaller arasındaki Öklid uzaklığının en üst seviyeye çıkarılmasıyla bulunur [6]. Kanalda sıfır ortalamalı bir Gauss gürültüsü etkili olup, alıcıda MAP sezicisi kullanıldığında, ortalama hata olasılığını en düşük değere çekmek için sinyaller arasındaki Öklid uzaklığını, verilen güç kısıtlaması altında, en büyük seviyeye çıkarmak gerekir [7]. Bu amaçla S_0 ve S_1 , (5)'teki kısıtlama dikkate alınarak $S_0 = -\sqrt{A}/\alpha$ ve $S_1 = \alpha\sqrt{A}$ şeklinde atanır [8]. Burada $\alpha \triangleq \sqrt{\pi_0/\pi_1}$ şeklinde tanımlanmaktadır. O halde, (2)'de verilen en genel ortalama hata olasılığı, bu durum için aşağıdaki ifadeye indirgenir:

$$P_e^{\text{kla}} = \int_{\Gamma_1} \pi_0 p_N(y + \sqrt{A}/\alpha) dy + \int_{\Gamma_0} \pi_1 p_N(y - \alpha\sqrt{A}) dy.$$

Burada $p_N(\cdot)$ gürültü OYF'sini, Γ_0 ve Γ_1 ise sırasıyla alıcıdaki 0 ve 1 sembolleri için önceden belirlenmiş karar bölgelerini simgelemektedir. Örneğin, alıcıda işaret sezicisi kullanılacaksa karar bölgeleri, $\Gamma_0 = (-\infty, 0)$ ve $\Gamma_1 = (0, \infty)$ şeklindedir. MAP sezicisi kullanılması durumunda Γ_0 (Γ_1), $\pi_0 p_N(y + \sqrt{A}/\alpha)$ ifadesinin $\pi_1 p_N(y - \alpha\sqrt{A})$ 'dan büyük eşit (küçük) olduğu bölge olarak alınır. Bu sezici için yukarıdaki ortalama hata olasılığı ifadesi

$$P_e^{\text{kla}} = \int_{-\infty}^{\infty} \min\{\pi_0 p_N(y + \sqrt{A}/\alpha), \pi_1 p_N(y - \alpha\sqrt{A})\} dy$$

şeklinde de yazılabilir. Klasik işaretleme, bazı gürültü OYF'leri ve karar kuralları için optimal yöntem olsa da, bazı durumlarda deterministik işaretler yerine stokastik işaretlerin kullanımı, sistemin ortalama hata olasılığı performansını geliştirebilmektedir. [6]'da klasik işaretlemenin optimal olması için yeterli koşullar ile stokastik işaretlemenin deterministik işaretlemeyi geliştirebilmesi için yeterli olan koşullar elde edilmektedir. Ayrıca optimal işaretlerin, sabit sezici ve (5)'teki ortalama güç kısıtı altında her sembol için, en fazla iki farklı sinyal değerinin rastgeleleştirilmesi şeklinde yazılabileceği gösterilmektedir.

3.2. Optimal Sezici ve Optimal İşaretleme

Bu bölümde, alıcıda tek bir sezici olduğu ($K = 1$) ve optimal işaretleme ile sezicinin ortak tasarlandığı durum sunulmaktadır. Burada, [3]'te $\mathbb{E}\{|S_j|^2\} \leq A, j \in \{0, 1\}$ şeklinde olan her işarete özgü güç kısıtı yerine, (3)'te verilen ortalama güç kısıtı kullanılmaktadır. Bu koşullar altında, (4)'te verilen en genel problem aşağıdaki gibi indirgenir:

$$\begin{aligned} \min_{\{\phi, p_{S_0}, p_{S_1}\}} \sum_{j \in \{0,1\}} \pi_j \mathbb{E}\{g(S_j, \phi)\} \\ \text{öyle ki } \sum_{j \in \{0,1\}} \pi_j \mathbb{E}\{|S_j|^2\} \leq A. \quad (6) \end{aligned}$$

Burada $\mathbb{E}\{g(S_j, \phi)\} \triangleq \int_{\Gamma_{1-j}} \mathbb{E}\{p_N(y - S_j)\} dy$ şeklinde tanımlanmakta olup, beklenti işlemi S_j 'lerin OYF'leri üzerinden alınmaktadır. Verilen her bir karar kuralı ϕ için, (6)'daki $g(S_j, \phi)$ ifadesi, sadece S_j 'nin bir fonksiyonudur. Bu özel durum [6]'da incelenen problemin aynısı olup, o çalışmadaki Lemma 1'in sonucu bu noktada kullanılabilir. [6]'da S_0 ve S_1 , \mathbf{S} rassal vektörünün elemanları olarak $\mathbf{S} \triangleq [S_0 \ S_1]$ şeklinde tanımlanmıştır. $p_{\mathbf{S}}(\cdot)$, S_0 ve S_1 'in ortak OYF'sini temsil eder. [6]'daki Lemma 1'de optimal ortak OYF'nin $p_{\mathbf{S}}(\mathbf{s}) = \lambda \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_1) + (1 - \lambda) \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_2)$ şeklinde yazılabileceği ispatlanmaktadır. Burada $\lambda \in [0, 1]$ olup, \mathbf{s}_1 ve \mathbf{s}_2 iki boyutlu vektörlerdir. Ortak OYF kullanılarak, her bir işaretin OYF'si, $p_{S_j}(\mathbf{s}) = \lambda \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_{1,j}) + (1 - \lambda) \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_{2,j}), j \in \{0, 1\}$ şeklinde elde edilebilir.

Alıcıda y sayılı ölçümü kullanılarak iki sembol arasında karar verilirken, MAP kurallı sezici kullanmak, ortalama hata olasılığını minimize etmektedir [7]. MAP kurallı sezicide, verilen işaret OYF'leri p_{S_0} ve p_{S_1} kullanılarak ölçüme bağlı koşullu OYF'ler, $p_1(y)$ ve $p_0(y)$ hesaplanır ve eğer $\pi_1 p_1(y) \geq \pi_0 p_0(y)$ ise sembol 1, aksi durumda ise sembol 0 seçilir. O halde, S_0 ve S_1 'in OYF'leri belirlendikten sonra, ortalama hata olasılığını en düşük değerine indirmek amacıyla, bütün olası karar kuralları arasında arama yapmak gereksiz olup sadece MAP karar kuralı ve ona karşılık gelen ortalama hata olasılığı dikkate alınmalıdır [3]. Bu bilgiler ışığında, (6)'daki eniyileme problemi aşağıdaki şekle indirgenir:

$$\min_{\{\lambda, s_{1,1}, s_{2,1}\}} \int_{-\infty}^{\infty} \min\{\pi_0 f_0(y), \pi_1 f_1(y)\} dy$$

öyle ki $\lambda \left(\pi_0 |s_{1,0}|^2 + \pi_1 |s_{1,1}|^2 \right) +$

$$(1 - \lambda) \left(\pi_0 |s_{2,0}|^2 + \pi_1 |s_{2,1}|^2 \right) \leq A, \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (7)$$

Burada $f_j(y) = \lambda p_N(y - s_{1,j}) + (1 - \lambda) p_N(y - s_{2,j})$, $j \in \{0, 1\}$ şeklindedir. Bu eniyileme problemi çözüldükten sonra optimal işaretler, $j \in \{0, 1\}$ için, $p_{S_j}^{\text{opt}}(s) = \lambda^{\text{opt}} \delta(s - s_{1,j}^{\text{opt}}) + (1 - \lambda^{\text{opt}}) \delta(s - s_{2,j}^{\text{opt}})$ şeklinde olur. Optimal sezici ise MAP kuralını kullanır. Diğer bir deyişle, $\pi_1 p_1(y) \geq \pi_0 p_0(y)$ ise 1 sembolünü, değil ise 0 sembolünü seçer. Bu durumda, $j \in \{0, 1\}$ için, $p_j(y) = \lambda^{\text{opt}} p_N(y - s_{1,j}^{\text{opt}}) + (1 - \lambda^{\text{opt}}) p_N(y - s_{2,j}^{\text{opt}})$ olarak hesaplanır.

3.3. Optimal Sezici Rasgeleştirme ve Optimal İşaretleme

Bu bölümde, (4)'te verilen en genel problemin çözümü sunulmaktadır. Alıcıdaki sezicilerin sabit olmadığı bu durumda, her seziciye gönderilen semboller için kullanılacak optimal işaretleme, bu işaretleme karşılık alıcıda yer alacak optimal seziciler ve bu seziciler arasındaki optimal rasgeleştirme oranı ortak tasarlanmaktadır [5].

Bölüm 3.2'de belirtildiği gibi, alıcıda MAP sezicilerinin kullanılması ortalama hata olasılığını en aza düşürmektedir. Bu durumda, (4)'te verilen optimal tasarım problemi şu şekilde ifade edilebilir:

$$\min_{\mathcal{U}} \sum_{i=1}^K v_i \int_{\mathbb{R}} \min_{j \in \{0, 1\}} \left\{ \pi_j \mathbb{E} \left\{ p_N(y - S_j^{(i)}) \right\} \right\} dy$$

öyle ki $\sum_{i=1}^K v_i \left(\sum_{j \in \{0, 1\}} \pi_j \mathbb{E} \left\{ |S_j^{(i)}|^2 \right\} \right) \leq A$

$$\sum_{i=1}^K v_i = 1, \quad v_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, K\}. \quad (8)$$

Burada $\tilde{\mathcal{U}} = \left\{ v_i, p_{S_0^{(i)}}, p_{S_1^{(i)}} \right\}_{i=1}^K$ indirgenmiş eniyileme uzaydır. (8)'de verilen eniyileme problemi, tüm gürültü OYF'leri için geçerli olmasına karşın, olası tüm işaret OYF'leri üzerinden eniyilenmesi gerektiği için çözümü zor bir problemdir. Varsayalım ki P_e^{\dagger} (8)'de verilen eniyileme probleminin çözümü sonucunda elde edilmiş en düşük ortalama hata olasılığı olsun. (8)'de verilen problemi daha basit bir şekilde formüle etmek amacıyla, P_e^{\dagger} için bir alt sınır bulunacak ve devamında bu alt sınırın ulaşılabilirliği gösterilecektir. Bu maksatla ilk olarak sonuç aşağıda sonuç sunulmaktadır [5]:

Önerme 1: *Sezicilerde MAP kuralı kullanılması şartıyla, aynı ortalama güç kısıtı ve toplanır kanal gürültüsü istatistikleri altında, sadece stokastik işaretleme (sezici rasgeleştirme olmaksızın) kullanılarak elde edilebilecek en düşük ortalama hata olasılığı, sadece sezici rasgeleştirme (stokastik işaretleme olmaksızın) kullanılarak elde edilebilecek en düşük ortalama hata olasılığından daha düşük olamaz.*

Bu önermenin ispatı *min* fonksiyonuna Jensen eşitsizliğinin uygulanmasına dayanmaktadır ve detayları

[5]'te sunulmaktadır. Önermenin matematiksel olarak ifadesi şu şekildedir: $\int_{\mathbb{R}} \min_{j \in \{0, 1\}} \left\{ \pi_j \mathbb{E} \left\{ p_N(y - X_j) \right\} \right\} dy \geq$

$\mathbb{E} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \min_{j \in \{0, 1\}} \left\{ \pi_j p_N(y - X_j) \right\} dy \right\}$. Bu sonuç, (8)'in amaç fonksiyonuna uygulandığında (8)'e alt sınır teşkil eden aşağıdaki eniyileme problemi elde edilmektedir:

$$\min_{P_{\tilde{S}}} \mathbb{E} \left\{ \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \min_{j \in \{0, 1\}} \left\{ \pi_j p_N(y - \tilde{S}_j) \right\} dy}_{\triangleq G(\tilde{S})} \right\}$$

öyle ki $\mathbb{E} \left\{ \sum_{j \in \{0, 1\}} \pi_j |\tilde{S}_j|^2 \right\} \leq A \quad (9)$

Burada $p_{\tilde{S}}(\tilde{s}) \triangleq \sum_{i=1}^K v_i p_{S^{(i)}}(\tilde{s})$ ve $\tilde{s} \triangleq [\tilde{s}_0 \tilde{s}_1] \in \mathbb{R}^2$ olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca, $p_{S^{(i)}}(\cdot)$, sezici i 'ye gönderilen sembol 0 ve sembol 1'e ait işaretlerin ortak OYF'sini göstermektedir. Beklenti işlemi, yukarıda tanımlanan $p_{\tilde{S}}(\cdot)$ ortak OYF'si üzerinden hesaplanmaktadır. (9) dikkatli bir şekilde incelendiğinde, $G(\tilde{s})$ 'nin toplanır gürültü kanalı üzerinde ikili iletişim için deterministik \tilde{s} vektörü kullanıldığında alıcıdaki buna karşılık gelen MAP kurallı sezicinin ortalama hata olasılığını verdiği görülmektedir. Bu nedenle, $\mathbb{E}\{G(\tilde{S})\}$ ifadesinin \tilde{S} rastsal vektörünün OYF'sine karşılık gelen bir rasgeleştirmeyi temsil ettiği düşünülebilir. (9)'da verilen eniyileme probleminin çözümü P_e^* ile ifade edilirse, Önerme 1'den $P_e^* \leq P_e^{\dagger}$ eşitsizliğinin her zaman sağlandığı sonucu çıkmaktadır.

(9)'da belirtilen türden eniyileme problemleri literatürde birçok çalışmada incelenmiştir [2, 3, 4]. Bazı koşullar altında, (9)'da verilen eniyileme probleminin çözümü en fazla iki işaret vektörü arasında bir rasgeleştirmeye karşılık gelmektedir [5]. Yani optimal çözüm, $p_{\tilde{S}}^{\text{opt}}(\tilde{s}) = \lambda \delta(\tilde{s} - s_1) + (1 - \lambda) \delta(\tilde{s} - s_2)$ şeklinde ifade edilebilmekte ve bu durumda (9)'daki problem bu biçimdeki işaret OYF'leri üzerinden çözülebilmektedir:

$$\min_{\{\lambda, s_{1,1}, s_{2,1}\}} \lambda G(s_1) + (1 - \lambda) G(s_2)$$

öyle ki $\lambda H(s_1) + (1 - \lambda) H(s_2) \leq A, \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (10)$

Burada $G(s_k) = \int_{\mathbb{R}} \min_{j \in \{0, 1\}} \left\{ \pi_j p_N(y - s_{k,j}) \right\} dy$, $H(s_k) = \pi_0 |s_{k,0}|^2 + \pi_1 |s_{k,1}|^2$ ve $s_k = [s_{k,0} \ s_{k,1}] \in \mathbb{R}^2$ olarak verilmektedir.

Aşağıdaki sonuç, (10)'daki problemin (8) ile aynı sonuca ulaşacağını bildirmektedir [5]:

Önerme 2: (8) ve (10)'da belirtilen eniyileme problemlerinin çözümü sonucunda elde edilen en düşük ortalama hata olasılıkları eşittir.

Önerme 2, (8)'de tanımlı eniyileme probleminin görece çok daha basit bir eniyileme problemi biçiminde olan (10)'un çözümünden elde edilebileceğini belirtmektedir. Bu önermeden çıkarılacak diğer bir sonuç da alıcıda rasgeleştirme için hazır birden çok sezicinin bulunduğu durumda ($K \geq 2$), iki adet deterministik işaret vektörüne karşılık gelen MAP kurallı iki adet sezici arasında rasgeleştirme yapmanın optimal olduğudur. Diğer bir deyişle, en düşük ortalama hata olasılığını elde etmek için stokastik işaretleme gerek yoktur. Alıcıda tek bir sezici olduğu durumda ise ($K = 1$), optimal çözüm iki değer arasında stokastik işaretleme gerekli kılabilir [3].

4. Sayısal Sonuçlar

Bu bölümde, (4)'te verilen en genel problemin (10)'da açıklanan optimal çözümü, sayısal bir örnek üzerinden gösterilerek literatürde yer alan diğer işaretleme teknikleri ile arasındaki fark, ortalama hata performansı açısından incelenmektedir. Bu maksatla, toplanır gürültü kanalı üzerinden sayılı ölçümlerin elde edilebildiği, (1)'de yer alan tanıma uygun bir ikili iletişim sistemi ele alınmaktadır. Alıcının birden çok sezici arasında rasgeleştirme uygulayabildiği varsayılmaktadır.

Ortamda etkili olan gürültü, her bileşenin eşit ağırlık kat-sayısına ve varyansa sahip olduğu bir Gauss karışım gürültüsü olarak modellenmektedir. Bu durumda gürültünün OYF'si, $p_N(n) = \sum_{i=1}^L \exp\{-(n - \mu_i)^2 / (2\sigma^2)\} / (\sqrt{2\pi} \sigma L)$ şeklinde yazılabilir [1]. Benzetimde, Gauss karışım gürültüsünün parametreleri şu şekilde alınmıştır: $L = 2$ ve $\mu = [-2 \ 2]$. Güç limiti ise $A = 5$ olarak alınmakta ve sembollerin eşit önsel olasılıklara sahip oldukları ($\pi_0 = \pi_1 = 0.5$) kabul edilmektedir. Bu bölümde, [3]'tekinе benzer şekilde farklı işaretleme senaryoları için performans karşılaştırması yapılmaktadır:

Klasik: Bu yaklaşımda kanal gürültüsü ile ilgili olarak herhangi bir bilgiye sahip olunmadığı varsayılarak, Bölüm 3.1'deki klasik işaretleme yöntemi $\{+\sqrt{A}, -\sqrt{A}\}$ kullanılmaktadır. Bu örnekte alıcıda MAP kuralı sezici kullanılmakta ve dolayısıyla ortalama hata olasılığı ifadesi Bölüm 3.1'deki son denklemden hesaplanmaktadır ($\alpha = 1$).

Optimal-Stokastik: Bu yaklaşımda, alıcıda tek bir sezicinin bulunduğu ve dolayısıyla sezici rasgeleleştirilmesinin mümkün olmadığı durum ele alınarak, (7)'de belirtilen optimal stokastik işaretleme ve buna karşılık gelen optimal sezicinin tasarımı örneklendirilmektedir.

Optimal-Deterministik: Bu yaklaşım, (7)'de sunulan problemin basitleştirilmiş halidir. Burada işaretlemenin iki farklı sinyal seviyesi üzerinden rastgeleleştirme ile değil de, tek bir seviye üzerinden deterministik olarak yapıldığı varsayılmaktadır. Bu durumda, (7)'deki problem şu probleme indirgemektedir:

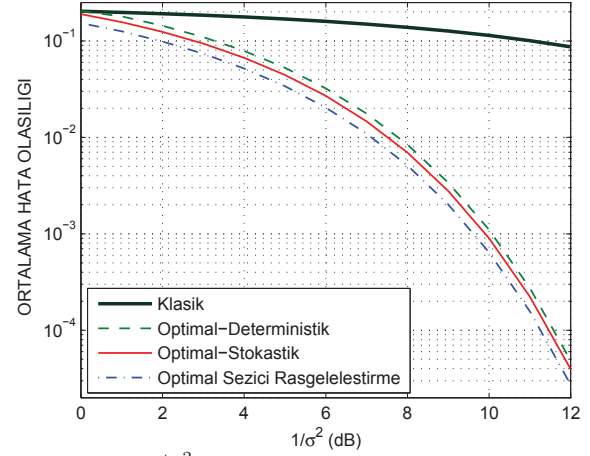
$\min_{s_0, s_1} \int_{\mathbb{R}} \min_{j \in \{0,1\}} \{\pi_j p_N(y - s_j)\} dy$ öyle ki $\pi_0 |s_0|^2 + \pi_1 |s_1|^2 \leq A$. Bu çözüm, sezici rasgeleleştirme ya da stokastik işaretlemeyi içermemektedir. Yalnızca optimal deterministik işaret seviyeleri ile buna karşılık gelen MAP kuralı seziciyi bulmaktadır.

Bu yaklaşımlara ek olarak önceki bölümde detaylandırılan en genel problemin çözümü de incelenmektedir.

Optimal Sezici Rasgeleleştirme ve Optimal Deterministik İşaretleme: Bu yaklaşımda, (4)'te ifadesini bulan en genel eniyileme probleminin (10)'da belirtilen çözümü örneklendirilmektedir.

Yukarıda bahsedilen yaklaşımların ortalama hata olasılıkları, $1/\sigma^2$ 'nin farklı değerleri için Şekil 1'de gösterilmektedir. Şekil 1'de görüldüğü üzere sıfır ortalama Gauss gürültü için optimal olduğu bilinen klasik çözüm, örnekte verilen Gauss karışım gürültüsünde diğer optimal çözümlerden oldukça kötü bir performans sergilemektedir. Deterministik sinyal seviyelerinin eniyilenmesi sonucunda, Optimal-Deterministik eğrisinden de görüleceği üzere, klasik yönteme göre belirgin bir performans artışı elde edilmektedir. Optimal stokastik işaretleme, ortalama hata olasılığını daha da aşağıya çekmektedir (bkz. Optimal-Stokastik). Ancak, en düşük ortalama hata değerine, deterministik işaretleme ile sezici rasgeleleştirilmenin ortak kullanımı sayesinde ulaşılmaktadır. Ayrıca, Şekil 1'de tüm işaretleme yöntemlerinin performansının küçük $1/\sigma^2$ (büyük σ^2) için birbirine yakınsadığı görülmektedir.

Tablo 1'de Optimal-Deterministik, Optimal-Stokastik ve Optimal-Sezici Rasgeleleştirme yaklaşımları sonucunda elde edilen optimal işaretleme değerleri sunulmaktadır. Optimal deterministik işaretleme için s_0 ve s_1 değerleri, sırasıyla sembol 0 ve sembol 1 için kanal üzerinden deterministik olarak gönderilen işaret seviyelerini vermektedir. Optimal stokastik işaretleme için ise, sembol $i \in \{0, 1\}$ için kullanılan optimal işaretin OYF'si şu



Şekil 1: Çeşitli $1/\sigma^2$ değerleri için ortalama hata olasılıkları.

şekildedir: $p_S(s) = \beta \delta(s - s_{1,i}) + (1 - \beta) \delta(s - s_{2,i})$ ve ilgili değerler Tablo 1'de yer almaktadır. Son olarak da, Optimal-Sezici Rasgeleleştirme etiketi ile belirtilen en genel problemin çözümü, $[s_{1,0} \ s_{1,1}]$ işaret çiftine karşılık gelen MAP sezicisini λ olasılıkla; $[s_{2,0} \ s_{2,1}]$ işaret çiftine karşılık gelen MAP sezicisini ise $1 - \lambda$ olasılıkla kullanılmaktadır. Bu değerler de Tablo 1'de verilmektedir.

5. Kaynakça

- [1] V. Bhatia, B. Mulgrew, "Non-parametric likelihood based channel estimator for Gaussian mixture noise," *Signal Processing*, vol. 87, pp. 2569–2586, Nov. 2007.
- [2] Ç. Göken, S. Gezici, O. Arıkan, "Optimal stochastic signaling for power-constrained binary communications systems," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 9, no. 12, pp. 3650–3661, Dec. 2010.
- [3] Ç. Göken, S. Gezici, O. Arıkan, "Optimal signaling and detector design for power-constrained binary communications systems over non-Gaussian channels," *IEEE Communication Letters*, vol. 14, no. 2, Feb. 2010.
- [4] A. Patel, B. Kosko, "Optimal noise benefits in Neyman-Pearson and inequality-constrained signal detection," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, no. 5, pp. 1655–1669, May 2009.
- [5] B. Dülek, S. Gezici, "Detector randomization and stochastic signaling for minimum probability of error receivers," submitted, 2011 [www.ee.bilkent.edu.tr/~gezici/dulek.pdf].
- [6] Ç. Göken, S. Gezici, O. Arıkan, "On the optimality of stochastic signaling under an average power constraint," *Proc. 48th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*, Sep. 29-Oct. 1, 2010.
- [7] H. V. Poor, *An Introduction to Signal Detection and Estimation*, 2nd ed., New York: Springer-Verlag, 1994.
- [8] I. Korn and J. P. Fonseka and S. Xing, "Optimal binary communication with nonequal probabilities," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 51, no.9, pp. 1435–1438, Sep. 2003.

$1/\sigma^2$ (dB)	Deterministik İŖa.		Stokastik İşaretleme				Sezici Rasgeleleştirme					
	s_0	s_1	β	$\hat{s}_{1,0}$	$\hat{s}_{2,0}$	$\hat{s}_{1,1}$	$\hat{s}_{2,1}$	λ	$s_{1,0}$	$s_{2,0}$	$s_{1,1}$	$s_{2,1}$
0	-2.2359	2.2362	0.7078	-1.8619	-1.8618	0.7223	4.5932	0.4453	-3.0614	-1.2207	3.0610	1.2216
2	-1.8662	0.5732	0.2940	-4.7150	-0.5793	1.7966	1.7966	0.5889	-1.1602	-3.1981	1.1617	3.1990
4	-2.0515	0.2245	0.6945	-1.7674	-1.7672	0.4798	4.6887	0.5925	-1.1121	-3.2361	1.1131	3.2354
6	-2.1446	0.0296	0.6815	-1.7525	-1.7525	0.4086	4.6255	0.4153	-3.2257	-1.0745	3.2267	1.0776
8	-0.0524	2.0574	0.6689	-1.7469	-1.7468	0.3570	4.5528	0.5726	-1.0537	-3.1966	1.0467	3.1976
10	-1.4442	0.6252	0.6583	-1.7971	-1.7993	0.2699	4.4346	0.5598	-1.0280	-3.1556	1.0409	3.1684
12	-0.8504	1.1934	0.6608	-0.6452	-4.7865	1.3975	1.3974	0.5515	-1.0166	-3.0838	1.0262	3.1971

Tablo 1. Bahsedilen yaklaşımlar için hesaplanan optimal parametreler