Hızlı ve Hassas Doğrusal Kanonik Dönüşüm Algoritmaları

Fast and Accurate Linear Canonical Transform Algorithms

Haldun M. Özaktaş
Elektrik Mühendisliği Bölümü
Bilkent Üniversitesi
06800 Bilkent, Ankara
haldun@ee.bilkent.edu.tr

Aykut Koç
Akıllı Veri Analitiği Araştırma Program Müdürlüğü
ASELSAN Araştırma Merkezi
06172 Yenimahalle, Ankara
aykutkoc@aselsan.com.tr

Özetçe **—Doğrusal kanonik dönüşümler bilim ve mühendisliğin birçok alanında karşımıza çıkar. Kesirli Fourier dönüşümü ve sıradan Fourier dönüşümü gibi önemli bazı dönüşümler, bu dönüşüm ailesinin özel halleridir. Bu dönüşüm ailesi özellikle dalga yayılımını modellemesi açısından önemlidir. Gürültü temizleme, görüntü şifreleme, ve optik sistemlerin analizi gibi birçok uygulaması vardır. Burada bu dönüşümlerin hesaplanması için hızlı ve hassas algoritmalardan söz edilmektedir. Bu algoritmalar hızlı Fourier dönüşümü algoritmaları ile aynı hassasiyet ve hızı yakalayabildiklerinden optimal algoritmalar olarak görülebilirler. Bu algoritmaların geliştirilmesinde sinyallerin verimli şekilde örneklenmesi büyük önem taşımaktadır.**

Anahtar Kelimeler—Doğrusal kanonik dönüşümler, kesirli Fourier dönüşümleri, ikinci dereceden faz sistemleri, ABCD optiği, dönüşümler, hızlı algoritmalar

Özet **—Linear canonical transforms are encountered in many areas of science and engineering. Important transformations such as the fractional Fourier transform and the ordinary Fourier transform are special cases of this transform family. This family of transforms is especially important for the modelling of wave propagation. It has many applications such as noise removal, image encryption, and analysis of optical systems. Here we discuss algorithms for fast and accurate computation of these transforms. These algorithms can achieve the same accuracy and speed as fast Fourier transform algorithms, so that they can be viewed as optimal algorithms. Efficient sampling of signals plays an important part in the development of these algorithms.**

Keywords—Linear canonical transforms, fractional Fourier transforms, quadratic-phase systems, ABCD optics, transforms, fast algorithms

I. GİRİŞ

Burada ilgileneceğimiz integral dönüşümleri ailesi, $f(u)$ adlı bir sinyali $g(u)$ adlı başka bir sinyale aşağıdaki ifade ile dönüştürür:

$$g(u) = \sqrt{\beta}\, e^{-j\pi/4} \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\pi(\alpha u^2 - 2\beta u u' + \gamma {u'}^2)\right] f(u')\, du'. \quad (1)$$

Burda α, β, γ çoğunlukla reel parametrelerdir ama karmaşık sayı da olabilirler. Bazen bu parametreler topluca, bir parametre matrisi $\mathbf{M}$ ile de gösterilirler. Doğrusal kanonik dönüşüm olarak bilinen bu dönüşümler üniter dönüşümlerdir [1]–[5].

Yukardaki ifade tek boyutlu doğrusal kanonik dönüşüm içindir. Bu dönüşümlerin iki boyuta genellemesi, Fourier dönüşümlerinin ve kesirli Fourier dönüşümlerinin iki boyuta genellemesi ile aynı şekilde yapılabilir. Ayrılabilir iki boyutlu dönüşümlerde, her iki boyuttaki dönüşüm birbirinden bağımsız olarak alınır. Bunlarda her boyutta üç tane olmak uzere, iki boyutta toplam altı tane parametre vardır. Ancak ayrılabilirlik özelliği olmayan iki boyutlu dönüşümler de vardır; bunlarda iki boyut arasında çapraz terimler bulunur ve arka arkaya iki boyutta tek boyutlu dönüşüm almaya eşdeğer olmayan bir durum karşımıza çıkar. Bunlarda on tane parametre vardır. Bunun ötesinde daha az çalışılmış olan karmaşık parametreli doğrusal kanonik dönüşümler vardır. Bunların özel halleri ise çift taraflı Laplace dönüşümlerini, Bargman dönüşümlerini, Gauss-Weierstrass dönüşümlerini, kesirli Laplace dönüşümlerini [6], ve kesirli Fourier dönüşümlerini [7] içerir. Bu metinde bunların hepsine değineceğiz. Böylece okuyucuya çok geniş bir dönüşüm ailesinin hızlı ve hassas hesaplanması konusunda rehberlik edebileceğiz.

Tek boyutlu doğrusal kanonik dönüşümler, üç parametreli integral dönüşümleridir ve özel halleri arasında tek parametreli kesirli Fourier dönüşümleri [2], [8] ölçekleme işlemleri, çörp çarpma ve çörp evrişim işlemleri de vardır. Çörp evrişim işlemi, Fresnel dönüşümü olarak da bilinir. Benzer özel haller iki boyutlu dönüşümler için de geçerlidir. Örneğin ayrılabilirlik özelliği olmayan kesirli Fourier dönüşümü [9], ayrılabilirlik özelliği olmayan doğrusal kanonik dönüşümlerin özel halidir.

978-1-4673-7386-9/15/$31.00

Ayrılabilir olmayan dönüşümler çok daha genel olup, optikte astigmatik vb. sistemleri temsil edip modelleyebilirler.

Doğrusal kanonik dönüşümler, elektromanyetik, akustik ve diğer dalga yayılımı problemlerinde önemli yere sahiptirler çünkü değişik durumlardaki dalga denklemlerinin çözümünü temsil ederler. Optik frekanslarda, bu dönüşümler ince mercekler, Fresnel yaklaşımında boşlukta ışığın yayılımı, ve bunların herhangi bir şekilde dizilimlerini modelleyebilirler [10]–[12]. Optikte kullanılan $ABCD$ sistemleri [13] de zaten matematiksel olarak doğrusal kanonik dönüşümlerle ifade edilebilirler ve bu nedenle bu dönüşümler optikte ve dalga yayılımında birçok uygulama bulmuştur. Doğrusal kanonik dönüşümlerin bu alanların dışında da uygulamaları vardır. Burada sadece birkaç örnek vermekle yetineceğiz: [14]–[18].

Gerek optik sinyal işleme, gerekse de genel sayısal görüntü işleme açısından bu dönüşümlerin verimli ve hassas hesaplanması önemlidir. Burda elbette örneklemenin özel bir önemi vardır. Hem reel hem de karmaşık doğrusal kanonik dönüşümlerin örneklenmesi konusunda daha evvelden yapılan çalışmalardan bazıları şunlardır: [19]–[23].

II. DOĞRUSAL KANONİK DÖNÜŞÜMLER İÇİN HIZLI ALGORİTMALARA GENEL BAKIŞ

Tarif edeceğimiz algoritmalar matris faktörizasyonuna dayanmaktadır. Her doğrusal kanonik dönüşüm bir parametre matrisine sahiptir. Bu matris, tanımda verilmiş olan α, β, γ parametrelerine eşdeğerdir. Bu matrisi daha temel işlemlere faktörize ederek, bu temel işlemleri arka arkaya uygulamak esasına dayalı algoritmalar geliştirilebilir. Bu temel işlemlerin en yavaş olanı dahi $O(N \log N)$ zamanda hesaplanabildiği için, doğrusal kanonik dönüşümün tamamı da bu zamanda hesaplanabilir. Çok sayıda bu tür faktörizasyon mümkündür [2], ama hepsi hesaplamaya eşit derecede elverişli değildir. Örneğin, denklik 1'e bakarak, hesaplamanın çörp çarpma, Fourier dönüşümü ve ikinci bir çörp çarpma olarak gerçekleştirilmesi mümkün görünmektedir. Fakat bu naif yaklaşım gereksiz derecede yüksek ve maliyetli örneklemeye yol açmaktadır.

Örnekleme sürecinin etkin şekilde yönetilmesi büyük önem taşımaktadır. Zira çörp çarpma işlemi frekans içeriğini, sinyalin gerçek frekans içeriğine göre çok fazla genişletmektedir. Bu nedenle, bu işlemden sonra örnekleme yapmak gereksiz derecede yüksek örneklemeyle sonuçlanmaktadır. Bu da hem hafıza gerekliliğini artırmakta, hem de algoritmanın hızını yavaşlatmaktadır.

III. TEK BOYUTLU DOĞRUSAL KANONİK DÖNÜŞÜMLER İÇİN HIZLI ALGORİTMA

Burda vereceğimiz dönüşüm matematiksel fizikte Iwasawa faktörizasyonu olarak bilinen faktörizasyondan esinlenmiştir. Burda bu faktörizasyonu sadece fonksiyonel olarak ifade edeceğiz. (Aynı faktörizasyonun matrisler cinsinden ifade edilmesi de mümkündür. Bunda asıl doğrusal kanonik dönüşümü ifade eden matris birkaç matrisin çarpımı olarak ifade edilir. Bu yaklaşımı görmek için [24] numaralı referansa bakılabilir.)

$$g(u) = e^{-ia\pi/4} e^{-i\pi q u^2} f_{\mathrm{sc}}(u) \tag{2}$$

$$f_{\mathrm{sc}}(u) = \sqrt{1/M}\, f_a(u/M). \tag{3}$$

Burda $f_a(u)$ fonksiyonu $f(u)$ fonksiyonunun kesirli Fourier dönüşümüdür. Yukardaki ifadede aşağıda yer alan parametreler tanımlanmıştır:

$$a = (2/\pi)\mathrm{arccot}\gamma, \tag{4}$$

$$M = \begin{cases} \sqrt{1+\gamma^2}/\beta, & \gamma \geq 0, \\ -\sqrt{1+\gamma^2}/\beta, & \gamma < 0, \end{cases} \tag{5}$$

$$q = \frac{\gamma\beta^2}{1+\gamma^2} - \alpha. \tag{6}$$

Hem karakökün hem de ters tanjant işleminin sonucu $(-\pi/2, \pi/2]$ aralığında yer almalıdır.

Yukardaki faktörizasyondaki birinci işlem, kesirli Fourier dönüşümüdür ki [21] ve takip eden çalışmalarda $O(N \log N)$ zamanda hesaplanması gösterilmiştir. İkinci işlem M ile ölçeklemedir ki aslında herhangi bir hesaplama gerektirmemekte, sadece eldeki örneklerin yeniden yorumlanması anlamına gelmektedir. Son işlem olan çörp çarpması ise $O(N)$ zamanda yapılabilen bir işlemdir. Algoritma ile ilgili diğer ayrıntılar [24] adlı eserde bulunabilir.

Bu yaklaşımdan farklı olarak, eniyi algoritmayı bulduğumuza emin olabilmek adına, bütün olası faktörizasyonları bitirici şekilde araştırdığımız bir çalışmamız da mevcuttur. Ölçekleme, çörp çarpma ve Fourier dönüşümü cinsinden yapılabilecek bütün faktörizasyonların üçlü, dörtlü, beşli permütasyonları tamamen incelenmiş ve en iyi faktörizasyon tespit edilmiştir [25]. Bu yöntemle bulunan sonuçlar yukardaki ile benzer özelliklere sahiptir ve bu yaklaşımların optimalliğini kanıtlamaktadır.

IV. İKİ BOYUTLU DOĞRUSAL KANONİK DÖNÜŞÜMLER İÇİN HIZLI ALGORİTMA

İki boyutlu algoritmanın geliştirilmesi için, yine Iwasawa faktörizasyonunun iki boyutlu biçiminden başlanmıştır. Burda da faktörizasyonları matrisler cinsinden vermek mümkün olmakla beraber, daha basit ve anlaşılır olması açısından faktörizasyonu, işlemleri temsil eden operatörler cinsinden vereceğiz:

$$\mathcal{C}_{\mathbf{M}} = \mathcal{Q}_{\mathbf{G}}\, K_G\, \mathcal{M}_{\mathbf{S}}\, K_S\, \mathcal{R}_{\mathrm{r}_2}\, \mathcal{F}_{\mathrm{a_x,a_y}}\, J\, \mathcal{R}_{\mathrm{r}_1}. \tag{7}$$

Burda $\mathcal{Q}_{\mathbf{G}}$ iki boyutlu bir çörp çarpma işlemini, $\mathcal{M}_{\mathbf{S}}$ iki boyutlu bir ölçekleme islemini, $\mathcal{R}_{\mathrm{r}_2}$, iki boyutlu bir koordinat rotasyon islemini, $\mathcal{F}_{\mathrm{a_x,a_y}}$, iki boyutlu ayrılabilir bir kesirli Fourier dönüşümünü, ve $\mathcal{R}_{\mathrm{r}_1}$ ise ikinci bir iki boyutlu koordinat rotasyon işlemini temsil etmektedir. J ise burda basit bir interpolasyon işlemine karşı gelmekte ve rotasyon sonrası iki boyutlu örnek değerlerinin tekrar ilk baştaki kartezyen koordinatlara dönüştürülmesine imkan tanımaktadır. K_S ve K_G, ölçekleme ve çörp işlemleri öncesi yapılan interpolasyon işlemlerine karşı gelmektedir. Operatörlerin altında yer alan semboller onların parametrelerini temsil etmektedir ve bu parametreler hesaplamak istediğimiz doğrusal kanonik dönüşümün parametreleri cinsinden bulunmaktadır. Oldukça uzun olan bu formülleri burda vermiyoruz; dileyen okuyucular [26] numaralı referansa bakabilirler.

Yukardaki ifade oldukça karışık gözükmekle beraber, tek boyutlu algoritmaya özünde benzerdir. Esas itibariyle, bütün doğrusal kanonik dönüşümlerin özünde bir ayrılabilir kesirli Fourier dönüşümü yattığı fikrine dayanmaktadır. Ancak ayrılabilir olmayan bir işlemi ayrılabilir bir işlem cinsinden ifade edebilmek için, iki adet koordinat rotasyonu arasına "sandviç" yapmamız gerekmektedir. En sağda yer alan koordinat rotasyonu ilk gerçekleştirilendir. Sonrasında döndürülmuş örneklerin ilk baştaki kartezyen koordinatlara uymaması sorununu çözmek için bir interpolasyon vardır. Sonra kesirli Fourier dönüşümü gelir ve ikinci koordinat rotasyonu gerçekleştirilir. İşin can alıcı kısmı burda bitmiştir bile. Bunun takbinde ölçekleme ve çörp çarpması yapılması gerekir, ama onların da başına gelmesi gereken interpolasyonlar vardır.

Bütün bu işlemlerin sonucunda hala daha hız ve hassasiyet konusunda tek boyutta elde edilenle aynı başarı sağlanabilmektedir [26].

V. KARMAŞIK PARAMETRELİ DOĞRUSAL KANONİK DÖNÜŞÜMLER İÇİN HIZLI ALGORİTMA

Reel parametreli doğrusal kanonik dönüşümlerin, karmaşık parametreli dönüşümlere genellenmesi oldukça karışıktır [1]. Bu durumda parametrelerin karmaşık sayılar olmasından dolayı üç bağımsız parametre yerine altı bağımsız parametre vardır. Burda kullanılacak faktörizasyon şu şekilde ifade edilebilir:

$$\mathcal{C}_{\mathbf{M}} = \mathcal{Q}_{\mathbf{G_3}}\, \mathcal{F}^{-1}\, \mathcal{Q}_{\mathbf{G_2}}\, \mathcal{F}\, \mathcal{Q}_{\mathbf{G_1}}. \tag{8}$$

Burda $Q_{\mathbf{G_1}}$, $\mathcal{Q}_{\mathbf{G_2}}$, $\mathcal{Q}_{\mathbf{G_3}}$, karmaşık parametreli çörp çarpma işlemleridir. $\mathcal{F}^{-1}$ ve $\mathcal{F}$ ise ters ve düz sıradan Fourier işlemleridir.

Uygun faktörizasyon bulunduktan sonra bunların hayata geçirilmesi tek boyuttaki ile benzer şekilde gerçekleştirilebilir ve yine benzer hız ve hassasiyet başarısı yakalanabilmektedir. Bu faktörizasyona dayalı hesaplamaların ayrıntıları için [27] eserine bakılabilir.

VI. SAYISAL ÖRNEKLER

Basitlik açısından tek boyutlu örnekler için sayısal sonuçlar vereceğiz [25].

Örnek alarak aldığımız sinyaller şunlardır: F1: $\exp(-\pi u^2 - i\pi u^2)$, F2: $1.5\mathrm{tri}(u/3) - 0.5\mathrm{tri}(u)$, $(\mathrm{tri}(u) = \mathrm{rect}(u) * \mathrm{rect}(u))$. Bu fonksiyonlar zaman-şıklık düzleminde çapı 8 uzunluğunda bir daireyle oldukça iyi bir şekilde kapsandıklarından, zaman-sıklık çarpımları $N = 8^2$ alınabilir. F3: Her bit 2 birim uzunluğunda olmak üzere $[-8, 8]$ aralığını kaplayan 01101010 değerli barkod; burda $N = 16^2$ olarak alınmıştır.

Doğrusal kanonik dönüşüm olarak iki değişik parametre seti alınmıştır: T1: $(\alpha, \beta, \gamma) = (-3, -2, -1)$ ve T2: $(\alpha, \beta, \gamma) = (-4/5, 1, 2)$. Bu dönüşümler ve bu fonksiyonlar için sonuçlar tabloda verilmiştir. Referans olarak, çok verimsiz ve kaba kuvvete dayalı, çok büyük sayıda örnek üzerinden çalışan Simpson kuralı kullanılmıştır ve hatalar doğru kabul edilen bu hesaplamaya göre belirlenmiştir.

(Hatalar, algoritmanın bulduğu sonuçla, kaba kuvvete dayalı referans arasındaki enerji farkının, referansın enerjisine normalize edilip, yüzdeye çevrilmesi ile bulunmustur.)

Aynı tabloda, aynı sinyallerin ayrık Fourier dönüşümü kullanılarak Fourier dönüşümlerinin hesaplanmasındaki hatalar da referans olarak verilmiştir.

Tablodaki sonuçlarla ilgili söylenebilecekler şunlardır. Öncelikle, çıkan hata, fonksiyona ve bizim zaman ve frekans

Tablo I. BAZI FONKSİYONLAR (F) VE DÖNÜŞÜMLER (T) KULLANILDIĞINDA ORTAYA ÇIKAN YÜZDE HATALARIN KARŞILAŞTIRILMASI.

	T1	T2	DFT
F1	$\mathbf{2.7 \times 10^{-17}}$	$\mathbf{6.6 \times 10^{-17}}$	$\mathbf{2.0 \times 10^{-21}}$
F2	$\mathbf{11 \times 10^{-4}}$	$\mathbf{9.9 \times 10^{-4}}$	$\mathbf{6.2 \times 10^{-4}}$
F3	$\mathbf{1.4}$	$\mathbf{1.5}$	$\mathbf{1.2}$

uzamı için yaptığımız varsayıma bağlıdır. Bazı fonksiyonların zamanda veya frekansta kuyrukları daha uzundur. Bu kuyrukları mümkün olduğu kadar içine alacak şekilde zaman ve frekans uzamları varsayılmalıdır, ama gereksiz yere büyük bir zaman ve frekans uzamı varsaymak da gereksiz yere hafıza ve hız maliyetlerini artırır. Örneğin, F3 sinyali için seçtiğimiz uzam, diğer durumlara göre daha az muhafazakar şekilde belirlendiği için, hata da daha fazla çıkmaktadır. İstersek N değerini artırarak bu hatayı azaltabiliriz, ama sinyalin ne kadarlık bir enerjisini bu uzamların dışında bırakmayı kabul edeceğimz nihayetinde ihtiyaç duyulan hassasiyete bağlıdır ve mutlak doğrusu diye bir şey yoktur. Bu nedenle hatanın kendisinin büyük veya küçük olmasi bize algoritmanın performansı konusunda fazla bir şey söylemez. Burda bize referans teşkil edecek şey, aynı uzam seçimi ile sıradan ayrık Fourier dönüşümünün ne kadar hatayla hesaplanabildiğidir. Tablodan görebileceğimiz gibi, anlatılan algoritma ile doğrusal kanonik dönüşümler hesaplandığında elde edilen hatalar, ayrık Fourier dönüşümü için elde edilenlerle çok benzerdir. Yani örneklerimizde ayrık Fourier dönüşümü için elde edilenle aynı hassasiyet seviyesi yakalanmıştır.

VII. SONUÇ

Doğrusal kanonik dönüşümlerin hızlı ve hassas hesaplanmasıyla ilgili olan bu çalışmada, giren sinyalin N örneğinden yola çıkarak, $O(N \log N)$ zamanda çıkan sinyalin N örneğini hesaplayan algoritmalar sunduk. Burda N, sinyalin içkin zaman-sıklık çarpımına yakın alınabildiği için gereğinden fazla örnekleme sözkonusu degildir.

Yaklaşımımız, geleneksel numerik analiz yerine, sinyal işleme ve örnekleme kavramlarına dayanmaktadır. Algoritmaların kullanım şekli, tıpkı sıradan Fourier dönüşümü için olan hızlı Fourier dönüşümü algoritması için olduğu gibidir. Hassasiyeti sınırlayan tek şey, tıpkı sıradan Fourier dönüşümünde olduğu gibi, bir sinyalin hem kendisinin hem de Fourier dönüşümünün sınırlı bir uzama sahip olamayacağı gerçeğidir. Başka deyişle, burda sunulan algoritmalar, hem hassasiyet açısından hem hız açısından, hızlı Fourier dönüşümü ile aynı performansı sunarlar ve bundan iyi yapabilmeyi umamayacağımız için de optimal algoritmalar olarak görülebilirler.

TEŞEKKÜR

Haldun Özaktaş'ın çalışmaları Türkiye Bilimler Akademisi tarafından kısmen desteklenmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Wolf, K. B., [*Integral Transforms in Science and Engineering (Chapter 9: Construction and properties of canonical transforms)*], New York: Plenum Press (1979).

[2] Ozaktas, H. M., Zalevsky, Z., and Kutay, M. A., [*The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing*], New York: Wiley (2001).

[3] Bastiaans, M. J., “The Wigner distribution function applied to optical signals and systems,” *Optics Communications* **25**(1), 26 – 30 (1978).

[4] Alieva, T. and Bastiaans, M. J., “Properties of the canonical integral transformation,” *J. Opt. Soc. Am. A* **24**(11), 3658–3665 (2007).

[5] Koç, A., Ozaktas, H. M., and Hesselink, L., “Fast and accurate algorithms for quadratic phase integrals in optics and signal processing,” Three-Dimensional Imaging, Visualization, and Display: SPIE Proceedings *SPIE Bellingham, Washington, 2011, (25–29 April 2011, Orlando, Florida’da sunulmuştur)* , 04–1–04–5 (2011).

[6] Torre, A., “Linear and radial canonical transforms of fractional order,” *J. Compt. and Appl. Math.* **153**(1-2), 477–486 (2003).

[7] Shih, C. C., “Optical interpretation of a complex-order Fourier transform,” *Opt. Lett.* **20**(10), 1178–1180 (1995).

[8] Ozaktas, H. M., Kutay, M. A., and Candan, Ç., [*Transforms and Applications Handbook (Chapter 14: Fractional Fourier Transform) in Alexander D. Poularikas, editor*], CRC Press, Boca Raton, Florida (2010).

[9] Sahin, A., Kutay, M. A., and Ozaktas, H. M., “Nonseparable two-dimensional fractional Fourier transform,” *Appl. Opt.* **37**(23), 5444–5453 (1998).

[10] Oktem, F. S. and Ozaktas, H. M., “Equivalence of linear canonical transform domains to fractional Fourier domains and the bicanonical width product: a generalization of the space–bandwidth product,” *J. Opt. Soc. Am. A* **27**(8), 1885–1895 (2010).

[11] Ozaktas, H. M. and Oktem, F. S., “Phase-space window and degrees of freedom of optical systems with multiple apertures,” *J. Opt. Soc. Am. A* **30**(4), 682–690 (2013).

[12] Özaktaş, H. M. and Öktem, F. S., “Optik sinyaller ve sistemlerde doğrusal kanonik dönüşümler, serbestlik derecesi, ve örnekleme,” IEEE 22. Sinyal İşleme ve İletişim Uygulamaları Kurultayı, *IEEE, New Jersey, 2014 (23–25 Nisan 2014, Trabzon’da sunulmuştur)* , 429–432 (2014).

[13] Hecht, E., [*Optics, 4th Ed.*], Addison Wesley, New York (2001).

[14] Chen, X., Guan, J., Liu, N., Zhou, W., and He, Y., “Detection of a low observable sea-surface target with micromotion via the Radon-linear canonical transform,” *IEEE Geosci. Remote Sensing Lett.* **11**(7), 1225–1229 (2014).

[15] Chen, X., Guan, J., Huang, Y., Liu, N., and He, Y., “Radon-linear canonical ambiguity function-based detection and estimation method for marine target with micromotion,” *IEEE Trans. Geoscience and Remote Sens.* **53**(4), 2225 – 2240 (2015).

[16] Singh, N. and Sinha, A., “Chaos based multiple image encryption using multiple canonical transforms,” *Optics and Laser Technology* **42**(5), 724–731 (2010).

[17] Li, B.-Z. and Shi, Y.-P., “Image watermarking in the linear canonical transform domain,” *Mathematical Problems in Engineering* **2014** (2014).

[18] Qiu, W., Li, B.-Z., and Li, X.-W., “Speech recovery based on the linear canonical transform,” *Speech Communication* **55**(1), 40–50 (2013).

[19] Hennelly, B. M. and Sheridan, J. T., “Fast numerical algorithm for the linear canonical transform,” *J. Opt. Soc. Am. A* **22**(5), 928–937 (2005).

[20] Hennelly, B. M. and Sheridan, J. T., “Generalizing, optimizing, and inventing numerical algorithms for the fractional Fourier, Fresnel, and linear canonical transforms,” *J. Opt. Soc. Am. A* **22**(5), 917–927 (2005).

[21] Ozaktas, H. M., Arıkan, O., Kutay, M. A., and Bozdağı, G., “Digital computation of the fractional Fourier transform,” *IEEE Transactions on Signal Processing* **44**(9), 2141–2150 (1996).

[22] Oktem, F. S. and Ozaktas, H. M., “Exact relation between continuous and discrete linear canonical transforms,” *Signal Processing Letters, IEEE* **16**(8), 727 –730 (2009).

[23] Healy, J. J. and Sheridan, J. T., “Sampling and discretization of the linear canonical transform,” *Signal Process.* **89**(4), 641–648 (2009).

[24] Ozaktas, H. M., Koç, A., Sari, I., and Kutay, M. A., “Efficient computation of quadratic-phase integrals in optics,” *Opt. Lett.* **31**(1), 35–37 (2006).

[25] Koç, A., Ozaktas, H. M., Candan, C., and Kutay, M. A., “Digital computation of linear canonical transforms,” *IEEE Trans. Signal Process.* **56**(6), 2383–2394 (2008).

[26] Koç, A., Ozaktas, H. M., and Hesselink, L., “Fast and accurate computation of two-dimensional non-separable quadratic-phase integrals,” *J. Opt. Soc. Am. A* **27**(6), 1288–1302 (2010).

[27] Koç, A., Ozaktas, H. M., and Hesselink, L., “Fast and accurate algorithm for the computation of complex linear canonical transforms,” *J. Opt. Soc. Am. A* **27**(9), 1896–1908 (2010).