

Zaman-Frekans Dağılımı İçin Çekirdek Kestirimi Kernel Estimation for Time-Frequency Distribution

Zeynel Deprem, A. Enis Çetin
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Bilkent Üniversitesi
Ankara, Türkiye
zdeprem@ee.bilkent.edu.tr, cetin@bilkent.edu.tr

Özetçe—Bu dokümanda çözünürlüğü yüksek ve çapraz terim içermeyen Cohen sınıfı bir Zaman-frekans (ZF) dağılımının, çekirdek kestirim yöntemi ile elde edilmesi tanıtılmaktadır. Çekirdek kestirimi, başlangıç taslak bir zaman-frekans dağılımının l_1 normuna ait epigraf kümesi üzerine izdüşümü ile elde edilmektedir. Kestirilen çekirdek, sinyalin belirsizlik (Ambiguity) düzlemindeki hizalanması ile uyumlu ve çapraz terimleri içermeyecek bir filtreleme sağlamaktadır.

Anahtar Kelimeler—zaman-frekans, Cohen sınıfı, İzdüşüm.

Abstract—In this article a method is introduced to obtain a high-resolution and cross term free Cohen's Class Time-frequency (TF) distribution based on kernel estimation. The kernel is estimated via projecting an initial rough TF distribution onto the epigraph set of l_1 norm. The kernel is aligned with the signal alignment in ambiguity domain and filters out the cross terms.

Keywords—time-frequency, Cohen's Class, projection.

I. GİRİŞ

Frekans içeriği zamana göre değişen sinyaller, AM/FM iletişim [1], radar [2], sonar, tıp, akustik ve ses gibi birçok alanda karşımıza çıkmaktadır. Bu tür sinyallerde önemli bir gereksinim, sinyali oluşturan bileşenlerin bir zaman-frekans (ZF) düzleminde ayrı ayrı görünebilmesidir. Bu tür bir analiz için bileşenleri ayrı ayrı tanınamıza yardımcı olacak yüksek çözünürlüklü ZF dağılımlarına ya da gösterimlerine ihtiyaç vardır.

Bu tür analizlerde klasik olarak Short-Time Fourier Transform (STFT) ve Wigner-Wille dağılımı (WVD) [3] kullanılmaktadır. Bunlardan STFT doğrusal ve göreceli olarak kolay bir transformasyondur. Ancak, iyi bir çözünürlük uygun bir pencere seçimini gerektirir ve aynı anda hem zaman hem de frekans ekseninde yüksek çözünürlük elde edilemez. WVD, diğer birçok iyi özelliğinin yanında oldukça yüksek çözünürlük sağlayan bir dağılımdır. Ancak kuadratik yapısından dolayı, tanımak istediğimiz ana sinyal bileşenlerinin yanında çapraz bileşenler de içerir. Bu sebeple, Cohen sınıfı [4] olarak adlandırılan ve WVD'nin bir genellemesi olan dağılım bu amaç için kullanılmaktadır. Bu tür dağılımlarda amaç Cohen sınıfı dağılımın çekirdeğini tasarlayarak çapraz terimleri yok etmek ve çözünürlüğü yüksek bir zaman-frekans dağılımı elde etmektir.

Bu makalede, iki aşamalı bir sinyal işleme ile, Cohen sınıfı bir dağılım için sinyalle uyumlu bir çekirdeğin kestirimi

önerilmektedir. İlk aşamada standart ve Gaussian taslak bir çekirdek kullanılmakta ve bir dağılım elde edilmektedir. İkinci aşamada ise bu dağılımın, l_1 normuna ait epigraf kümesi üzerine izdüşümü elde edilerek, sinyal uyumlu bir çekirdek elde edilmektedir. İkinci çekirdek ile daha yüksek çözünürlüklü ve çapraz terim içermeyen bir dağılım elde edilebilmektedir.

II. COHEN SINIFI DAĞILIMLAR

Bir $x(t)$ sinyaline ait Wigner-Ville (WV) dağılımı aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir

$$W_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau/2)x^*(t - \tau/2)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1)$$

Cohen sınıfı dağılımlar WV dağılımının bir genellemesi olup aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$P_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_x(\tau, \theta)\Phi(\tau, \theta)e^{-j2\pi\theta t - j2\pi f\tau} d\theta d\tau. \quad (2)$$

Burada $A_x(\tau, \theta)$, WVD ile iki boyutlu Fourier Transform ilişkisine sahip olan ve bir çok hedef yakalama uygulamasında temel araç olan belirsizlik fonksiyonudur. Belirsizlik fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilir,

$$A_x(\tau, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau/2)x^*(t - \tau/2)e^{j2\pi\theta t} dt. \quad (3)$$

Denklem (2)'de $\Phi(\tau, \theta)$ Cohen sınıfı dağılımın çekirdeğini ifade etmektedir. $\Phi(\tau, \theta) = 1$ WV dağılımına karşılık gelmektedir.

III. COHEN SINIFI ÇEKİRDEK TASARIMI

Cohen sınıfı dağılımlar için başlangıçta bir çok sabit çekirdek kullanılmıştır. Choi ve Williams [5], Papandreou ve Boudreaux-Bartels [6] tarafından önerilen çekirdekler bunlara örnektir. Ancak, sinyalle uyumlu bir çekirdeğin, daha iyi çözünürlük sağlayacağı fark edilerek, Jones ve Baraniuk [7] tarafından aşağıdaki optimizasyon ile çekirdek tasarımı önerilmiştir.

$$\max_{\Phi^p} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} |A_x^p(r, \phi)\Phi^p(r, \phi)|^2 r dr d\phi, \quad (4)$$

$$\text{subject to } \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} |\Phi^p(r, \phi)|^2 r dr d\phi$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \sigma^2(\phi) d\phi \leq \alpha, \quad \alpha \geq 0, \quad (5)$$

burada, $A_x^p(r, \phi) = A_x(r \cos \theta, r \sin \theta)$ ve $\Phi^p(r, \phi)$ belirsizlik fonksiyonu ve çekirdeğin kutupsal koordinatlara göre gösterimidir. Belirsizlik fonksiyonu bir öz-iliinti (auto-correlation) fonksiyonu olduğu için $(r, \phi) = (0, 0)$ merkezi etrafındaki değerler genel anlamda sinyalin ana bileşenlerinden oluşmaktadır [7]. Çapraz bileşenler ise daha çok merkezden uzakta konumlanmaktadır. Bu sebeple Denklem (4) de çekirdek alçak geçiren Gaussian bir filtre olarak alınmaktadır ve $\sigma^2(\phi)$ çekirdeğin kutupsal düzlemde açığa bağımlı varyansını ifade etmektedir.

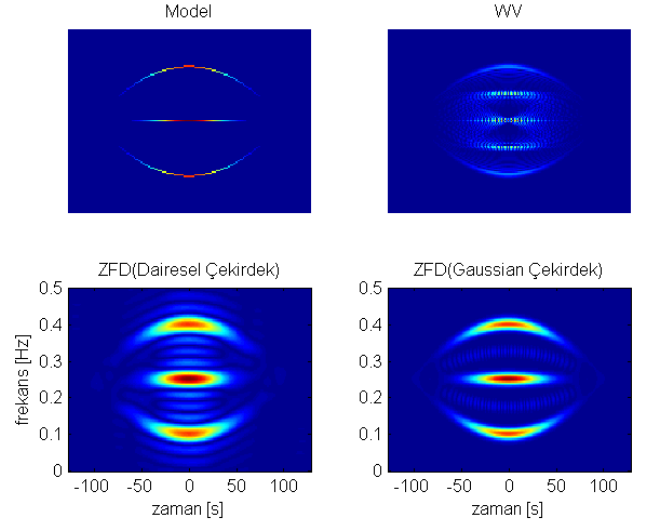
Optimizasyon ile belirsizlik düzlemindeki alçak geçiren filtre ile bir taraftan ana bileşenlere ait değerler azami seviyede seçilirken diğer taraftan 5 koşulu ile çekirdeğin alanı α ile sınırlandırılarak merkezden uzaktaki ve çapraz terimlere ait değerlerin filtrelenmesi sağlanmaktadır. Burada α parametresi ayarlanarak, istenen çözünürlük ve çapraz terim zayıflaması belirlenmektedir.

IV. EPİGRAF SETİ ÜZERİNE İZDÜŞÜMÜ İLE ÇEKİRDEK KESTİRİMİ

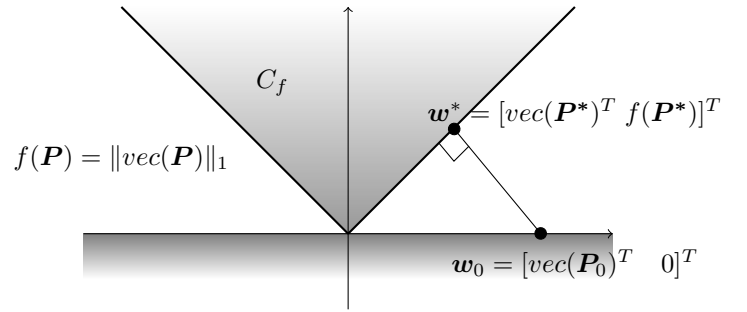
Bölüm III'te verilen çekirdek tasarım yöntemi nihayetinde kesikli sinyal işleme olarak, çok değişkenli bir optimizasyon probleminin çözümünü gerektirir. Bu anlamda işlem yoğun bir yöntemdir. Bu bölümde sinyale uyumlu bir çekirdeğin alternatif bir yöntem ile kestirimi tanıtılmaktadır.

Bir çok sinyal işleme uygulamasında hassas olmayan başlangıç bir işlem sinyale ait bazı özelliklerin gözükmesine ve kestirilmesine yardımcı olur. Bu anlamda söz konusu ön işlem, sonrasındaki daha hassas yapılması gereken işlemi kolaylaştırır. Böylece tek aşamada yapılması daha zor, hatta bazı durumlarda mümkün olmayan, bir sonuca iki aşamada daha kolay ulaşılabilir. Şekil 1 de kabaca seçilmiş sabit çekirdek ile elde edilmiş iki ZF dağılım örneği görülmektedir. Burada sol alt dağılım yarı çapı $r = r_0 = N/16$ olan dairesel bir çekirdek ile sağ alt dağılım ise, varyansı $\sigma(\phi) = N/16$ açığa göre sabit olan Gaussian bir çekirdek ile elde edilmiştir. Sol üstteki dağılım sinyale ait idealize edilmiş ve istenen ya da model dağılımı, sağ üst WV dağılımı, N ise $x(t)$ 'den örneklenmiş kesikli sinyalin uzunluğunu ifade etmektedir. Bu şekilde seçilen çekirdeklere sinyale bir uyumluluk yoktur. elde edilen dağılımlar, hedeflenen dağılımdan çok uzaktır. Ancak, WVD ile karşılaştırıldığında, sinyale ait 3 bileşen olduğu ve bunların kabaca ZF düzlemindeki konumlanması görülmektedir.

Şekil 1' de elde edilen dağılımlar, hedeflene dağılımın, bir anlamda, birer "gürültülü" versiyonları olarak göz önüne alınabilir. Bu sebeple bir çeşit gürültü arındırma yöntemi ile hedefe modele daha yakın bir dağılım elde edilebilir. Gürültü arındırmada temel yöntem, sinyale ait yan bilgileri ve özellikleri kullanarak o özellikleri barındıran bir kümeye iz düşüm almaktır. Örneğin alçak frekans içeriği olduğunu bildiğimiz bir sinyali beyaz ya da göreceli olarak yüksek frekanslı gürültüden kurtarmanın yolu onu sinyali kapsayacak şekilde alçak geçiren bir filtreden geçirmektir. Bu işlem temelde bir iz düşümdür. Bizim örneğimizde ZF düzleminde çözünürlüğü daha yüksek dolayısı ile l_0 ya da l_1 normu daha düşük bir sinyal arıyoruz. ZF düzleminde l_0 ya da l_1 normlarının daha düşük olması daha lokalize bir sonuç ya da yüksek çözünürlük elde etmek anlamına gelmektedir. Bu amaçla başlangıç olarak sabit bir çekirdek ile elde edilen ZF dağılımı Şekil 2 de görüldüğü



Şekil 1: Sinyale ait istenen model dağılımı(sol üst), WVD (sağ alt), dairesel ($r_0 = N/16$) sağ alt ve Gaussian ($\sigma(\phi) = N/16$) çekirdek ile elde edilmiş ZF dağılımları. N kesikli sinyalin uzunluğunu ifade temektir.



Şekil 2: l_1 normuna ait epigraf seti üzerine iz düşüm. Burada $vec(\mathbf{P}) \in \mathbf{R}^{N^2}$ and $\mathbf{w} = [vec(\mathbf{P})^T v]^T \in \mathbf{R}^{N^2+1}$ yükseltmiş uzayda tanımlanmaktadır.

gibi l_1 normuna ait epigraf kümesi üzerine iz düşüm olarak çözünürlüğü daha yüksek bir dağılım elde edebiliriz.

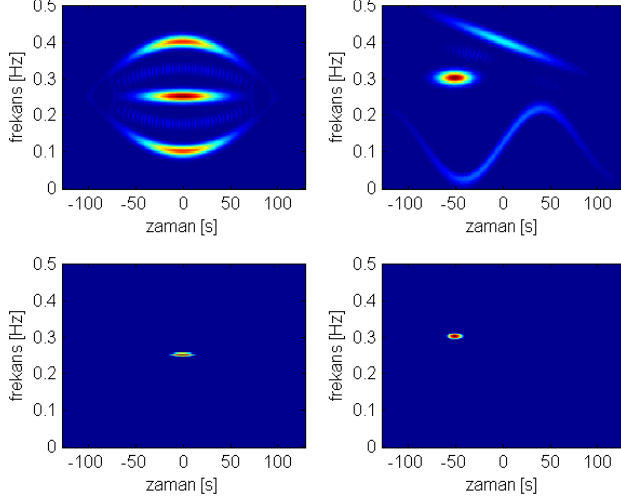
Burada \mathbf{P} , Denklem (2) deki $P(t, f)$ dağılımının zaman-frekans olarak kesikli halini ifade eden $N \times N$ bir matrisi, $vec(\mathbf{P}) \in \mathbf{R}^{N^2}$ ise onun vektör formunu ifade etmektedir. $\mathbf{w} \in \mathbf{R}^{N^2+1}$ ise \mathbf{R}^{N^2} ye göre yükseltmiş uzayı ifade etmektedir. Şekil 1 de sabit bir çekirdek ile elde ettiğimiz ZF dağılımını \mathbf{P}_0 olarak adlandırsak onu,

$$\mathbf{P}_0 = \mathcal{F}\{\mathbf{A}_x \bullet \Phi_0\}, \quad (6)$$

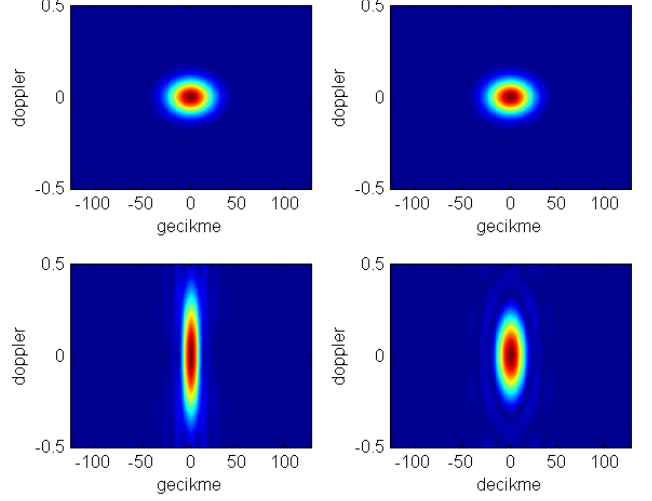
şeklinde ifade edebiliriz. Burada Φ_0 matris olarak sabit çekirdeği, \mathbf{A}_x ise yine matris olarak sinyale ait belirsizlik fonksiyonunu ifade etmektedir. $\mathcal{F}\{\}$ Fourier transformu, \bullet ise Hadamard çarpımı ifade etmektedir.

Şekil 2 de gösterilen l_1 normuna ait epigraf seti aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir:

$$C_f = \{\mathbf{w} = [vec(\mathbf{P})^T v]^T \in \mathbf{R}^{N^2+1} \mid f(\mathbf{P}) = \|vec(\mathbf{P})\|_1 \leq v\} \quad (7)$$



Şekil 3: İki örnek sinyale ait başlangıç ZF dağılımları P_0 (üst kısım) ve l_1 normuna ait epigraf seti üzerine iz düşümleri P^* (alt kısım).



Şekil 4: Başlangıç sabit çekirdek(üst kısım) ve örnek iki sinyale ait l_1 normuna ait epigraf seti üzerine iz düşümü ile elde edilen ve sinyale uyumlu çekirdekler(alt kısım).

Başlangıç ZF dağılımı P_0 'ın, l_1 normuna ait epigraf seti üzerine iz düşümü,

$$P^* = \min_{P \in C_f} \|vec(P) - vec(P_0)\|_2^2, \quad (8)$$

ile elde edilmektedir. Burada iz düşüm, Şekil (2) ten de görüleceği gibi, $P_0, P, P^* \in R^{N \times N}$ 'ye karşılık gelen ve yükseltilmiş uzaydaki $w_0, w, w^* \in R^{N^2}$ vektörleri ile yapılmaktadır. Söz konusu iz düşümün nasıl elde edileceği [8] ve [9] de belirtilmektedir. İki örnek sinyal için başlangıç dağılım P_0 ve iz düşüm sonrası elde edilen ZF dağılım P^* Şekil 3 te gösterilmektedir.

Şekil 3' den de görüleceği üzere iz düşüm sonucu elde edilen ZF dağılımları sinyale çok benzememektedir başka bir deyişle aşırı seyrek ve sinyalden uzaktır. Elde edilen sinyallerin en çok lokalize olan kısımlarına karşılık gelmektedir. Ancak, yapılan analizde, söz konusu iz düşümlerin sinyalin ZF düzlemindeki yönelimine uygun bir hizalanmaya ya da konumlanmaya sahip olduğu deneysel olarak gözlemlenmiştir. Bu sebeple iz düşüm sonrası elde edilen ZF dağılımına karşılık gelen belirsizlik fonksiyonu, tersine Fourier transform $A^* = \mathcal{F}^{-1}\{P^*\}$ ile elde edildiğinde ve maksimum değeri ile $\tilde{\Phi}_x = \frac{|A^*|}{\max_{k,l} |A^*[k,l]|}$ şeklinde normalize edildiğinde, sinyalin ZF düzlemindeki yönelimine ya da hizalanmasına uygun bir çekirdek elde edildiği görülmüştür. Şekil 4 te her iki sinyale ait başlangıç ve iz düşüm sonrası elde edilen çekirdekler gösterilmektedir. Şekil 5 de ise başlangıç sabit çekirdek ve kestirilen çekirdek ile elde edilen ZF dağılımları gösterilmektedir. Karşılaştırma amacıyla istenen model ZF ve Denklem (4)'te optimizasyon ile elde edilen ZF dağılımlar da gösterilmektedir. Şekilde sabit çekirdek ile elde edilen ZF dağılıma göre, kestirilen çekirdek ile elde edilen dağılımların daha yüksek çözünürlüğe sahip ve Denklem (4) ile optimize edilen çekirdeğe ait ZF dağılımı ile karşılaştırılabilir olduğu görülmektedir.

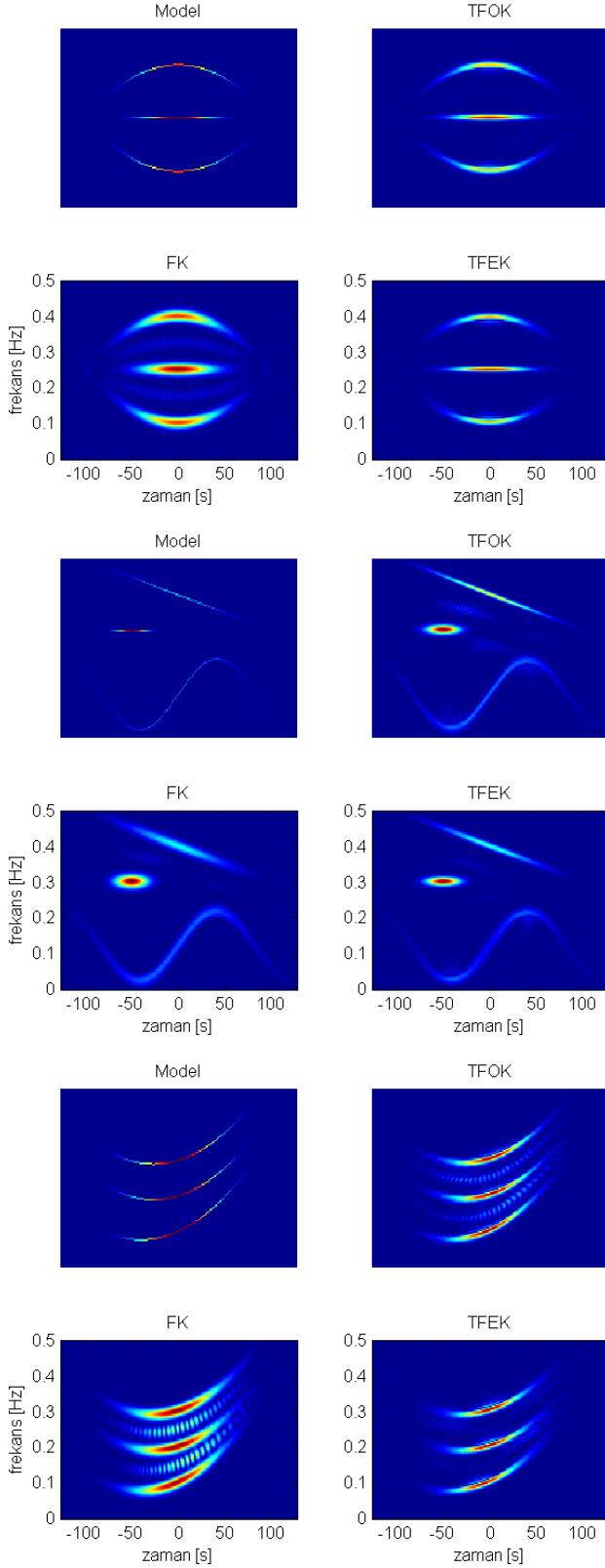
Her ne kadar başlangıçta seçilen taslak çekirdeğin hassas

Adım	İşlem
1	$A_0 = A_x \bullet \Phi_0$
2	$P_0 = \mathcal{F}\{A_0\}$
3	$P_1 = G \bullet P_0$
4	$P^* = \min_{P \in C_f} \ vec(P) - vect(P_1)\ _2^2$
5	$A^* = \mathcal{F}^{-1}\{P^*\}$
6	$\tilde{\Phi}_x = \frac{ A^* }{\max_{k,l} A^*[k,l] }$
7	$\tilde{P}_x = \mathcal{F}\{\tilde{\Phi}_x \bullet A_x\}$

Tablo I: l_1 normuna ait Epigraf setine iz düşüm yöntemi ile ZF dağılımı elde etmenin adımları

bir şekilde seçilmesi gerekmiyorsa da, sonuçta elde edilen ZF dağılımını etkilemektedir. Değişik örnekler üzerinde yapılan denemelerde çok sık olmasa bile bazı örnekler için, sonuçta elde edilen ZF dağılımında bazı istenmeyen bileşenlerin oluştuğu gözlemlenmiştir. Yine yapılan denemelerde söz konusu bileşenlerin başlangıç çekirdeğin alanını $\sigma(\phi) = N/16$ den daha küçük seçerek giderilebildiği görülmüştür. Fakat $\sigma(\phi)$ 'nin seçimi optimizasyon gerektiren başka bir konu olduğundan ve başlangıç sabit ve hassas olmayan çekirdek fikrine aykırı olduğundan tercih edilen bir durum değildir. Bunun yerine, aynı bileşenlerin ZF düzleminde, P_0 ' a, yine hassas olmayan Gaussian ve $\sigma(\phi) = N/4$ olarak seçilen ikinci bir G maskesi uygulandığında giderildiği gözlemlenmiştir. Bu ikinci maskeleyi de içerecek şekilde, Önerilen, l_1 normuna ait epigraf set üzerine iz düşüm yöntemi ile elde ZF dağılımının adımları Tablo I' de verilmektedir.

Tablo II'de ZF dağılımların model'e benzerlik seviyesi ve çözünürlüğü gösteren Renyi entropi [11] değerleri görülmektedir. Benzerlik Pearson Correlation ile ölçülmüş olup [0,1] aralığında değer almaktadır. Düşük Renyi entropi daha iyi



Şekil 5: Örnek 3 sinyal için çekirdek kestirimi ile elde edilen ZF dağılımların karşılaştırılması. Model: model ZF dağılımı, TFOK: Denklem (4) ile elde edilen ZF dağılımı ($\alpha = 1.4$), FK: sabit çekirdek ile elde edilen ZF dağılımı, TFEK: iz düşüm ile kestirilen çekirdek ile elde edilen ZF dağılımı göstermektedir.

Modele Benzerlik / Çözünürlük

Sinyal	Model	FK	TFEK	TFOK
Sinyal 1	1 / 8.13	0.44 / 11.32	0.60 / 10.13	0.60 / 10.19
Sinyal 2	1 / 7.46	0.41 / 10.87	0.47 / 10.31	0.48 / 10.15
Sinyal 3	1 / 8.24	0.39 / 11.45	0.42 / 10.37	0.42 / 10.40

Tablo II: ZF dağılımının Modele benzerlik / Renyi entropi değerleri. FK: sabit çekirdek ile ZF dağılımı, TFEK: kestirilen çekirdek ile ZF dağılımı, TFOK: optimize edilmiş çekirdek (denklem(4)) ile ZF dağılımı ifade etmektedir.

çözünürlük anlamına gelmektedir. Tablodan da görüleceği gibi, her 3 sinyal için de önerilen yöntem ve optimize edilmiş çekirdekle elde edilen ZF dağılımlar birbirine yakın sonuçlar vermektedir.

V. SONUÇ

İki aşamalı bir sinyal işleme ve l_1 normuna ait epigraf seti üzerine iz düşüm yöntemi ile Cohen sınıfı bir ZF dağılımına ait çekirdeğin kestirimi için bir yöntem önerilmiştir. Söz konusu yöntem ile elde edilen, ZF dağılımın çekirdek optimizasyonu ile elde edilen dağılım ile karşılaştırılabilir olduğu görülmüştür.

KAYNAKÇA

- [1] S. Barbarossa and A. Scaglione, "Adaptive time-varying cancellation of wideband interferences in spread-spectrum communications based on time-frequency distributions," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 47, no. 4, pp. 879–898, 2005.
- [2] D. R. Wehner, *High-Resolution Radar (2nd ed.)*. Boston: Artech House, 1994.
- [3] T. A. C. Claassen and W. F. G. Mecklenbrauiker, "The Wigner distribution - A tool for time-frequency signal analysis; part III: relations with other time-frequency signal transformations," *Philips Journal of Research*, vol. 35, no. 6, pp. 372 – 389, 1980.
- [4] L. Cohen, "Time-frequency distributions - a review," *Proceedings of the IEEE*, vol. 77, no. 7, pp. 941–981, 1989.
- [5] H. I. Choi and W. J. Williams, "Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-37, p. 862–871, June 1989.
- [6] A. Papandreou and G. F. Boudreaux-Bartels, "Distributions for time frequency analysis: A generalization of choi-williams and the butterworth distributions," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 5, p. 181–184, 1992.
- [7] D. L. Jones and R. G. Baraniuk, "An adaptive optimal-kernel time-frequency representation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, no. 10, pp. 2361 – 2371, 1995.
- [8] Z. Deprem and A. E. Çetin, "Crossterm-free Time-Frequency Distribution Reconstruction via Lifted Projections," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 51, no. 1, pp. 1–13, 2015.
- [9] G. Chierchia, N. Pustelnik, J.-C. Pesquet, and B. Pesquet-Popescu, "An epigraphical convex optimization approach for multicomponent image restoration using non-local structure tensor," in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pp. 1359–1363, 2013.
- [10] Z. Deprem, *Sparsity and Convex Programming in Time-frequency Processing*. PhD thesis, Bilkent University, Ankara, Turkey, 2014.
- [11] R. G. Baraniuk, P. Flandrin, A. J. E. M. Janssen, and O. Michel, "Measuring time-frequency information content using the Rényi entropies," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 47, no. 4, pp. 1391–1409, 2001.