

RAYLEIGH SÖNÜMLENMESİ ALTINDA KESİNTİ OLASILIĞININ DIŞBÜKEYLİK ÖZELLİKLERİ CONVEXITY PROPERTIES OF OUTAGE PROBABILITY UNDER RAYLEIGH FADING

Berkan Dölek, N. Denizcan Vanlı, Sinan Gezici

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Bilkent Üniversitesi, Bilkent, Ankara 06800, Türkiye
{dulek@ee, n_vanli@ug, gezici@ee}.bilkent.edu.tr

ÖZETÇE

Bu bildiri, kesinti olasılığının dışbükeylik özellikleri Rayleigh sönmülenmesi altında, alıcısında azami oransal birleştirme tekniği kullanılan ortalama güç kısıtlı bir iletişim sistemi için incelenmiştir. Kesinti olasılığının verici sinyal gücüne göre birinci ve ikinci dereceden türevlerine çalışılarak kesinti olasılığının tek bir büküm noktasına sahip tekdüze azalan bir fonksiyon olduğu belirlenmiştir. Bu gözlem, düşük ortalama verici güç kısıtı altında, var-yok tarzı güç rasgeleştirme/paylaşım yöntemi ile kesinti performansını iyileştirmenin mümkün olduğuna işaret etmektedir. Sonuçların kolayca seçmeli birleştirme tekniğine de genişletilebileceği gösterilmiştir. Son olarak, teorik sonuçları izah etmek için sayısal bir örnek sunulmuştur.

ABSTRACT

In this paper, convexity properties of outage probability are investigated under Rayleigh fading for an average power-constrained communications system that employs maximal-ratio combining (MRC) at the receiver. By studying the first and second order derivatives of the outage probability with respect to the transmitted signal power, it is found out that the outage probability is a monotonically decreasing function with a single inflection point. This observation suggests the possibility of improving the outage performance via on-off type power randomization/sharing under stringent average transmit power constraints. It is shown that the results can also be extended to the selection combining (SC) technique in a straightforward manner. Finally, a numerical example is provided to illustrate the theoretical results.

1. GİRİŞ

Telsiz iletişim uygulamalarında, düzenleyici kuruluşun sınırlamaları doğrultusunda çoklu erişim girişimi ile kanallar arası girişimi asgari düzeye çekmek ya da pil ömrünü uzatmak amacıyla verici gücü kısıtlanabilmektedir [1, 2]. Toplanır beyaz Gauss gürültüsü (TBGG) altında sembol hata olasılığının alıcısındaki sinyal gücünün gürültü gücüne oranına (SGO) bağlı olması nedeniyle, verici gücündeki kısıtlamalar hata performansını doğrudan etkilemektedir. [3] numaralı çalışmada, TBGG altında alıcıda en büyük olabilirlik (EO) sezicisi kullanıldığı durumda, tüm bir ve iki boyutlu sinyal yıldız kümeleri için sembol hata olasılığının sinyal gücünün dışbükey bir fonksiyonu olduğu ispatlanmıştır. Ancak daha üst

boyutlardaki ($B \geq 3$) sinyal yıldız kümeleri için hata olasılığı eğrisi düşük ve ara SGO değerlerinde içbükey olabilmektedir. Bu sonuçlar, alt boyutlarda ($1-B$ ve $2-B$) ortalama güç kısıtlı bir vericinin hata olasılığının sinyal gücünü rasgeleleştirerek ya da zaman paylaşımı yaparak azaltılamayacağını göstermekte iken daha yüksek boyutlarda güç rasgeleleştirmesine dayalı bir başarımlı artırımı mümkün olabilmektedir [3, Teorem 15].

Sönümlü davranış gösteren iletişim kanallarında ise alıcısındaki sinyal gücü, mesafe ve zamana bağlı olarak gölgeleme veya çokyollu sönmülenme nedeniyle rasgele bir şekilde değişmektedir. Alıcısındaki sinyal gücünün rasgele değişken olarak modellendiği bu durumlarda başarımlı kriteri olarak ortalama hata olasılığı veya kesinti olasılığı kullanılmaktadır. Kanala ait sönmülenme uyumluluk süresi (T_c) sembol süresi (T_s) mertebesinde ise ortalama hata olasılığı, başarımlı kriteri olarak kabul edilmektedir. Böylece, sembol süresi boyunca kanaldaki sönmülenme çarpanı sabit olarak kabul edilmekte ve birkaç bitte meydana gelen hataların düzeltim teknikleri kullanılarak uçtan uca iletişimi çok fazla etkilemeden giderilebileceği vurgulanmaktadır. Sönümlü kanalın alıcısındaki sinyal gücü üzerindeki etkisi bir nevi verici gücü rasgeleleştirmesi olarak değerlendirilebileceğinden, [3, Teorem 16]'da da belirtildiği üzere, alt boyutlardaki ($1-B$ ve $2-B$) sinyal yıldız kümelerinde sönmülenme etkisi ortalama hata olasılığını, aynı ortalama SGO altında çalışan deterministik TBGG kanalına kıyasla daha aşağıya çekemez. Diğer bir deyişle, sönmülenme alt boyutlarda her zaman kötüdür. Ancak, üst boyutlarda düşük SGO değerleri için hata olasılığını azaltan sönmülenme çeşitleri (ya da verici sinyal gücü rasgeleleştirme yöntemleri) bulunmaktadır.

Kanaldaki sönmülenme yavaş değişiyorsa ($T_s \ll T_c$), derin bir sönmülenme çok sayıda ardışık sembolün iletimini etkileyerek düzeltim teknikleri ile giderilemeyecek toplu hatalara neden olabilir. Makul bir başarımlı seviyesine ulaşmak için verici gücünü artırmak zorunda kalınabilir. Bu durumlarda, alıcısındaki SGO'nun katlanılabilir azami hata olasılığına karşılık gelen SGO değerinin altına düşmesi olasılığı olarak tanımlanan *kesinti olasılığı* önem taşımaktadır.

Bu bildiri, Rayleigh sönmülenmesi altında kesinti olasılığı eğrisinin gönderilen sinyal gücüne göre dışbükeylik ve içbükeylik özellikleri incelenmektedir. İletişimin ortalama güç kısıtı altında gerçekleştirildiği ve alıcıda çeşitleme yöntemi olarak azami oransal birleştirme (AOB) tekniğinin kullanıldığı varsayılmaktadır. Kesinti olasılığı fonksiyonunun tek bir büküm noktasına sahip olmasından dolayı, gönderilen sinyal gücünün belirli bir değer altında olduğu durumlarda kesinti olasılığı eğrisinin içbükey, bu değer üstünde olduğu durumlarda ise aynı fonksiyonun dışbükey olduğu saptanmıştır. Bu nedenle

düşük ortalama güç kısıtı altında çalışan iletişim sistemlerinde, verici gücünün iki farklı değer arasında rasgeleleştirilmesiyle kesinti olasılığını azaltmanın mümkün olduğu belirtilmektedir. Ayrıca, bu iki farklı değerden birinin her zaman sıfır çıktığı, dolayısıyla optimal çözümün var-yok iletim tarzında olduğu gösterilmektedir. Benzer sonuçların seçmeli birleştirme tekniği için de geçerli olduğuna değinildikten sonra sayısal örnekler sunulurak farklı alıcı çeşitleme teknikleri için kesinti olasılığında elde edilen iyileştirmeler gösterilmektedir.

2. PROBLEM TANIMI

Bir iletişim sisteminde alıcı, M sayıda çoklu anten kullanılarak Rayleigh sönümlü kanal üzerinden çeşitleme birleştirici yöntemlerle ölçümler elde etmektedir. Seziciye ulaşan SGO belirli bir eşik değerin altında ise alıcı hizmet kesintisi yaşamaktadır. Kesinti olasılığını azaltmak için vericinin iletim gücünde rasgeleştirme veya paylaşırma yapabilmeye kabiliyeti vardır. Bu maksatla, vericinin alıcıdaki gürültü seviyesinden ve Rayleigh sönümlemesinden kaynaklanan kanal-daki güç kaybının ortalama değerinden bir geribesleme kanalı vasıtasıyla haberdar olduğu varsayılmaktadır. Tanımı gereği kesinti olasılığı şu şekilde ifade edilmektedir: $P_{out}(\gamma_0) = P(\gamma_\Sigma < \gamma_0) = \int_0^{\gamma_0} p_{\gamma_\Sigma}(\gamma) d\gamma$. Burada γ_Σ , birleştirici çıktısındaki SGO'yu ifade eden bir rasgele değişkeni ve γ_0 da sezim için gerekli asgari SGO değerini simgelemektedir. Her antenden birleştirici girişine ulaşan daldaki gürültüye ait güç spektrum yoğunluğu eşit kabul edildiğinde, birleştirici girişindeki i 'nci daldaki gözlenen SGO, $\gamma_i \triangleq \rho\beta_i/N$ şeklinde ifade edilebilir. Burada, N gürültü gücünü, ρ verici gücünü ve β_i de ilgili daldaki sönümleme katsayısını vermektedir. Rayleigh sönümleme varsayımı altında β_i 'ye ait olasılık yoğunluk fonksiyonu (OYF) üstel dağılımla ifade edilir. Yani, $f_{\beta_i}(x) = \lambda^{-1}e^{-x/\lambda}$, $x \geq 0$ ve λ , Rayleigh sönümleme nedeniyle verici gücündeki ortalama kaybı göstermektedir.

Bağımsız ve özdeş sönümlemeye tabi yollardan alıcı antenlerine ulaşan sinyallerin evre uyumlu bir şekilde azami oransal çeşitleme tekniği ile birleştirildikleri düşünüldüğünde, birleştirici çıktısındaki SGO $\gamma_\Sigma = \sum_{i=1}^M \gamma_i$ olarak verilmektedir [2]. Özdeş sönümleme altında, her daldaki ortalama SGO birbirine eşittir ve $\bar{\gamma} \triangleq \rho\lambda/N$ dersek, γ_Σ rasgele değişkeninin OYF'si, aşağıdaki $2M$ serbestlik dereceli χ^2 dağılımı ile ifade edilebilir:

$$p_{\gamma_\Sigma}(\gamma) = \frac{\gamma^{M-1}e^{-\gamma/\bar{\gamma}}}{\bar{\gamma}^M(M-1)!}, \quad \gamma \geq 0 \quad (1)$$

Verilen sabit bir γ_0 değerine karşılık gelen kesinti olasılığı ise aşağıdaki denklemden hesaplanabilir [2]:

$$P_{out}(\gamma_0) = P(\gamma_\Sigma < \gamma_0) = 1 - e^{-\gamma_0/\bar{\gamma}} \sum_{m=1}^M \frac{(\gamma_0/\bar{\gamma})^{m-1}}{(m-1)!}. \quad (2)$$

$\gamma_0/\bar{\gamma}$ oranını, verici gücü cinsinden yazarsak: $\gamma_0/\bar{\gamma} = \frac{\gamma_0 N}{\rho \lambda} = c/\rho$. Burada, $c \triangleq \gamma_0 N/\lambda$ olarak tanımlanmıştır ve gürültü gücünün sezicidaki eşik SGO değeri ile çarpımının Rayleigh sönümlemesinden dolayı gerçekleşen güç kaybının ortalama değerine oranını göstermektedir. Dolayısıyla, (2)'deki ifade, verici gücü cinsinden aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$P_{out}(\rho) = 1 - e^{-c/\rho} \sum_{m=1}^M \frac{(c/\rho)^{m-1}}{(m-1)!}. \quad (3)$$

Bir sonraki bölümde (3)'te verilen kesinti olasılığı fonksiyonunun dışbükeylik ve içbükeylik özellikleri incelenecek

ve verici gücünde rasgeleştirme veya paylaşırma uygulanarak ortalama güç kısıtı altında kesinti olasılığını düşürmenin mümkün olup olmadığı tartışılacaktır. Diğer bir deyişle, aşağıdaki eniyileme probleminin çözümü araştırılacaktır:

$$\min_{k, \{\alpha_i, \rho_i\}_{i=1}^k} \sum_{i=1}^k \alpha_i P_{out}(\rho_i) \quad (4)$$

öyle ki $\sum_{i=1}^k \alpha_i \rho_i \leq \rho_{avg}$, $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ ve $\alpha_i \geq 0 \forall k$.

Burada ρ_{avg} , vericinin ortalama güç kısıtını simgelemektedir.

3. KESİNTİ OLASILIĞI EĞRİSİNİN DIŞBÜKEYLİK VE İÇBÜKEYLİK ÖZELLİKLERİ

Bu kısımda ilk olarak, (3)'te verici gücüne bağlı bir fonksiyon olarak verilen kesinti olasılığının birinci ve ikinci türevlerine bakılacaktır.

Önerme 1: $P_{out}(\rho)$ tekdüze azalan ve tek büküm noktası $\hat{\rho} = \frac{c}{M+1}$ 'de olan bir fonksiyondur.

İspat: P_{out} fonksiyonunun ρ 'ya göre türevi alınırsa aşağıdaki ifadeye ulaşılır:

$$P'_{out}(\rho) = -\frac{c^M}{(M-1)!} \frac{e^{-c/\rho}}{\rho^{(M+1)}}. \quad (5)$$

$c > 0$ ve $M \geq 1$ olduğundan, (5)'teki ifade tüm $\rho > 0$ değerleri için negatiftir. Dolayısıyla, $P_{out}(\rho)$ tekdüze azalan bir fonksiyondur. (5)'teki ifadenin ρ 'ya göre ikinci türevi alınarak büküm noktaları incelenebilir:

$$P''_{out}(\rho) = \frac{c^M}{(M-1)!} \frac{e^{-c/\rho}}{\rho^{(M+3)}} ((M+1)\rho - c). \quad (6)$$

(6)'daki ifadede $(M+1)\rho - c$ dışındaki ifadeler $\rho > 0$ için pozitifdir. Dolayısıyla, $\hat{\rho} = c/(M+1)$ değeri, $P'_{out}(\rho) = 0$ eşitliğinin tek çözümüdür. □

$P_{out}(\rho)$ eğrisinin $\rho < c/(M+1)$ değerleri için içbükey olması, düşük güçlü vericiler için kesinti olasılığının azaltılabileceğine işaret etmektedir. Optimum güç paylaşımı stratejisini ifade etmeden evvel, aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız var [4]:

Lemma 1: $P_{out}(\rho)$ eğrisinin tek büküm noktası $\hat{\rho} \triangleq \frac{c}{M+1}$ ile gösterilsin. $\hat{\rho}$ 'dan büyük eşit öyle bir ρ_t noktası vardır ki $P_{out}(\rho)$ fonksiyonunun ρ_t noktasındaki tanjantı $(0, 1)$ noktasından geçer ve $P_{out}(\rho)$ fonksiyonunun altında kalır.

İspat: (6)'daki ikinci türev ifadesi $P_{out}(\rho)$ fonksiyonunun, $\rho < \hat{\rho}$ için içbükey, $\rho > \hat{\rho}$ için dışbükey olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla, $P_{out}(\rho)$ fonksiyonunun $\rho = \hat{\rho}$ noktasındaki tanjant doğrusu, tüm $\rho < \hat{\rho}$ değerleri için $P_{out}(\rho)$ fonksiyonunun üstünde yer alır. $P_{out}(\rho)$ fonksiyonunun herhangi bir $\rho \geq 0$ noktasındaki tanjantının y -eksenini kestiği nokta şu şekilde ifade edilebilir: $f(\rho) = P_{out}(\rho) - \rho P'_{out}(\rho)$. Bu durumda, $f(\hat{\rho}) \geq P_{out}(0) = 1$ eşitsizliği yazılabilir. $P_{out}(\rho)$ ve $P'_{out}(\rho)$ fonksiyonları sürekli ve türevlenebilir fonksiyonlar oldukları için $f(\rho)$ fonksiyonu da türevlenebilir bir fonksiyondur. $f(\rho)$ fonksiyonunun birinci türevi incelenirse: $f'(\rho) = -\rho P''_{out}(\rho)$ bulunur. Dolayısıyla, $\rho > \hat{\rho}$ için $f'(\rho)$ negatiftir. Ayrıca, $\lim_{\rho \rightarrow \infty} f(\rho) = 0$ olarak bulunur. Bu durumda, $f(\rho)$ fonksiyonu $\rho \in (\hat{\rho}, \infty)$ aralığında tekdüze azalan, başlangıç değeri birden büyük ve sonsuzdaki limit değeri sıfır olan bir fonksiyondur. Dolayısıyla, bu aralıkta öyle bir ρ_t değeri vardır ki $f(\rho_t) = 1$ eşitliği sağlanır.

$P_{out}(\rho)$ fonksiyonu, $\rho \in (\hat{\rho}, \infty)$ aralığında dışbükey olduğu için, ρ_t noktasındaki tanjantı $\rho > \hat{\rho}$ değerleri için

$P_{out}(\rho)$ fonksiyonunun altında kalır. Öte yandan, $(0, 1)$ noktasını, $(\hat{\rho}, P_{out}(\hat{\rho}))$ noktasına bağlayan doğru parçası $P_{out}(\rho)$ fonksiyonunun bu aralıkta içbükey olmasından dolayı bu fonksiyonun altındadır ve doğru parçasının eğimi, $(P_{out}(\hat{\rho}) - 1)/\hat{\rho}$ şeklindedir. Benzer şekilde, $(0, 1)$ noktasını $(\rho_t, P_{out}(\rho_t))$ noktasına bağlayan doğru parçasının eğimi ise $(P_{out}(\rho_t) - 1)/\rho_t$ ile ifade edilir. Bu durumda $\hat{\rho} \leq \rho \leq \rho_t$ aralığında,

$$\frac{d}{d\rho} \frac{P_{out}(\rho) - 1}{\rho} = \frac{1 - f(\rho)}{\rho^2} \leq 0 \quad (7)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin geometrik anlamı, ikinci doğrunun birinci doğrunun altında olması gerektiğidir. $\rho < \hat{\rho}$ aralığında birinci doğru $P_{out}(\rho)$ eğrisinin altında kaldığı için, aynı aralıkta ikinci doğru da bu eğrinin altındadır. \square

Şimdi Lemma 1'i kullanarak ortalama güç paylaşım problemi için (4)'te bahsedilen güç paylaşım probleminin optimum çözümünü belirtebiliriz.

Önerme 2: Vericinin ortama gücü ρ_t değerinden büyük ise ($\rho_{avg} > \rho_t$) sürekli olarak ρ_{avg} gücünde iletim yapması gerekir. Eğer vericinin ortalama gücü ρ_t değerinden küçük eşit ise ($\rho_{avg} \leq \rho_t$), toplam iletim süresinin ρ_{avg}/ρ_t oranını ρ_t gücünde iletim yapacak şekilde kullanmalıdır; kalan bölümde ise iletim kesilmelidir.

İspat: Önerme 2'de verilen güç paylaşım yöntemi aşağıdaki kesinti olasılığını vermektedir:

$$P_{out}^{opt}(\rho_{avg}) = \begin{cases} P_{out}(\rho_{avg}), & \rho_{avg} > \rho_t \\ 1 - \rho_{avg}/\rho_t (1 - P_{out}(\rho_t)), & \rho_{avg} \leq \rho_t \end{cases} \quad (8)$$

(8)'de verilen yöntemin optimum olduğunu görmek için bu strateji altında elde edilen kesinti olasılık eğrisinin $P_{out}(\rho_{avg})$ fonksiyonundan küçük en büyük dışbükey eğri olduğunu göstermek yeterlidir [4, 5]. $\rho_{avg} > \rho_t$ için $P_{out}^{opt}(\rho_{avg})$ fonksiyonu bu aralıkta $P_{out}(\rho_{avg})$ fonksiyonuna eşit ve dolayısıyla dışbükeydir. $\rho_{avg} \leq \rho_t$ için $P_{out}(\rho_{avg})$ fonksiyonundan küçük ve bazı $\rho_0 \leq \rho_t$ değerleri için $P_{out}^{opt}(\rho_0) < g(\rho_0) \leq P_{out}(\rho_0)$ eşitsizliğini sağlayan dışbükey bir $g(\rho)$ fonksiyonu olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\alpha\rho_1 + (1 - \alpha)\rho_2 = \rho_0$ eşitliğini sağlayan herhangi ρ_1, ρ_2 ve $0 \leq \alpha \leq 1$ değerleri için

$$\begin{aligned} g(\rho_0) &\leq \alpha g(\rho_1) + (1 - \alpha)g(\rho_2) \\ &\leq \alpha P_{out}(\rho_1) + (1 - \alpha)P_{out}(\rho_2) \end{aligned} \quad (9)$$

eşitsizliği yazılabilir. $\rho_1 = \rho_t, \rho_2 = 0$ ve $\alpha = \rho_0/\rho_t$ değerleri için (9)'daki ifade $g(\rho_0) \leq P_{out}(\rho_t)\rho_0/\rho_t + 1 - \rho_0/\rho_t = P_{out}^{opt}(\rho_0)$ eşitsizliğini verir. Bu da başlangıçtaki $P_{out}^{opt}(\rho_0) < g(\rho_0)$ varsayımıyla çelişir. \square

Önerme 2, vericinin optimal güç paylaşım stratejisinin yalnızca ρ_t değeriyle belirlendiğini göstermektedir. Sadece anten sayısını gösteren M değişkeni ile kanal ve alıcı özelliklerini temsil eden c parametresine bağlı olan ρ_t , sayısal eniyileme yöntemleri kullanılarak $\rho_t \geq \hat{\rho}$ koşulu altında aşağıdaki denklemin çözümünden elde edilebilir:

$$P_{out}(\rho_t) = \frac{P_{out}(\rho_t) - 1}{\rho_t}. \quad (10)$$

4. SEÇİMLİ BİRLEŞTİRME TEKNİĞİ

Bu bölümde, alıcının çeşitleme tekniği olarak seçimli birleştirme yöntemini kullandığı varsayılmıştır ve problem tanımında verilen eşitlikler yeniden ele alınarak, optimal verici gücü rasgeleleştirme yöntemlerinin bu teknik için de kullanılabileceği gösterilmiştir.

Seçimli çeşitleme yöntemi kullanıldığında birleştirici çıkışındaki SGO şu şekilde ifade edilmektedir: $\gamma_\Sigma = \max\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M\}$. Bu durumda, kesinti olasılığı aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$P_{out}(\gamma_0) = \prod_{i=1}^M P(\gamma_i < \gamma_0) = \prod_{i=1}^M P\left(\beta_i < \frac{N\gamma_0}{\rho}\right). \quad (11)$$

Sinyal, Rayleigh sönümlenme kanalı üzerinden iletiildiği için, $c \triangleq N\gamma_0/\lambda$ olarak tanımlandığında, kesinti olasılığı verici gücünün bir fonksiyonu olarak şöyle yazılmaktadır:

$$P_{out}(\rho) = (1 - e^{-c/\rho})^M. \quad (12)$$

(12)'de verilen kesinti olasılığının birinci türevi:

$$P'_{out}(\rho) = -cM \frac{e^{-c/\rho}}{\rho^2} (1 - e^{-c/\rho})^{M-1} \quad (13)$$

olarak verilmektedir. Buradan, $P_{out}(\rho)$ fonksiyonunun $\rho > 0$ için tekdüze azalan bir fonksiyon olduğu görülür. Fonksiyonun ikinci türevi alındığında aşağıdaki ifade elde edilir:

$$P''_{out}(\rho) = -c^2 M \frac{e^{-c/\rho}}{\rho^4} (1 - e^{-c/\rho})^{M-2} h(\rho/c). \quad (14)$$

Burada, $h(x) \triangleq 1 - 2x + (2x - M)e^{-1/x}$ olarak tanımlanmıştır. $P_{out}(\rho)$ fonksiyonunun büküm noktasını analitik olarak bulmak kolay değildir. Ancak $P''_{out}(\rho) = 0$ (ve eşdeğer şekilde $h(x) = 0$) eşitliğini sağlayan tek bir nokta bulunduğunu $h(x)$ 'in aşağıda belirtilen limitler arasında tekdüze azalan bir fonksiyon olduğunu göstererek kanıtlamak mümkündür: $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1$ ve $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -(M + 1)$. $h(x)$ 'in $x > 0$ durumunda türevini inceleyelim:

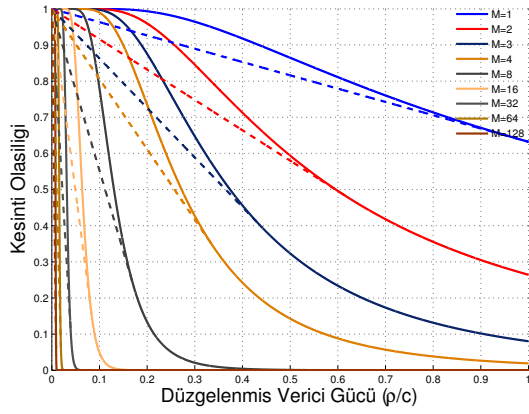
$$\begin{aligned} h'(x) &= -2 + 2 \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-1/x}}_{< 1, \forall x > 0} - \frac{M}{x^2} e^{-1/x} \\ &< -\frac{M}{x^2} e^{-1/x} < 0, \forall x > 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Dolayısıyla, $h(x) = 0$ eşitliğinin çözüm kümesi tek bir noktadır. Önerme 1, farklı bir büküm noktası değeriyle, seçimli birleştirme tekniği durumunda da geçerliliğini koruduğu için, Lemma 1 ve Önerme 2 de farklı bir ρ_t değeri ile bu teknik için geçerli olmaktadır. Dolayısıyla, düşük ortalama güç kısıtı altında verici gücünün var-yok türünde rasgeleleştirilmesi (paylaştırılması) vasıtasıyla kesinti olasılığı alıcıda seçimli birleştirme tekniği kullanılırken de düşürülebilmektedir.

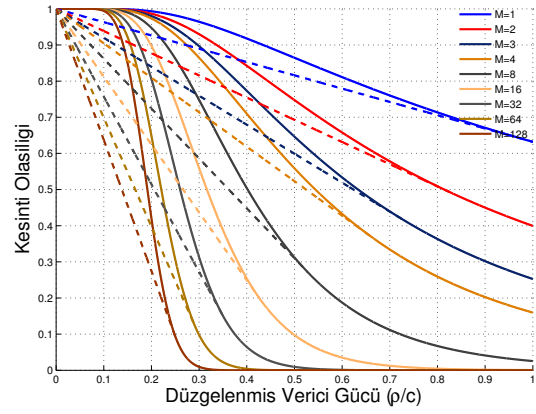
5. SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde, Önerme 2'de verilen var-yok tarzı güç paylaşımına dayanan optimum çözüm, sayısal örnekler üzerinden incelenerek kesinti olasılığının düşürülmesindeki etkisi araştırılacaktır. Alıcı, M adet anten vasıtasıyla elde ettiği sinyaller üzerinde azami oransal birleştirme ve seçmeli birleştirme tekniğini uygulayabilmektedir. Alıcıda sezim performansının etkilenmemesi için ihtiyaç duyulan asgari SGO'yu (γ_0), iletişim kanalındaki ortalama güç kaybını (λ) ve alıcıdaki gürültü gücünü (N) belirten parametreler $c = n\gamma_0/\lambda$ değişkeni altında birleştirilerek, kesinti olasılığına dair analizler düzgelelenmiş ρ/c parametresi üzerinde gerçekleştirilecektir.

Şekil 1-(a)'da alıcı çeşitleme yöntemi olarak azami oransal birleştirme tekniğini, Şekil 1-(b)'de ise seçimli birleştirme tekniğini kullanırken elde edilen kesinti olasılıkları, anten (dal) sayısını belirten M 'nin farklı değerleri için çizdirilmiştir. Optimum güç paylaşımı ile elde edilen kesinti olasılık eğrileri



(a)



(b)

Şekil 1: Farklı M değerleri için deterministik (katı çizgili) ve optimum güç paylaşım (kesik çizgili) kesinti olasılıkları (a) Azami oransal birleştirme yönteminde, (b) Seçimli birleştirme yönteminde.

ise her bir M değeri için aynı renkte ancak kesik çizgili olarak çizdirilmiştir. Her iki grafikten de gözlemlendiği üzere, verici gücünün yeterli olmadığı durumlarda kesinti olasılığını sabit güçte yayın yapmak yerine paylaşım (rasgeleleştirme) uygulanarak düşürmek mümkündür. Anten sayısı arttıkça güç paylaşım yöntemine ait kesinti doğrularının eğimlerinin (mutlak değerlerinin) artmasına paralel olarak deterministik yöntemle kıyasla sağladıkları performans artışı daha da belirgin hale gelmektedir. Diğer bir deyişle, alıcıda çeşitleme amaçlı kullanılan anten sayısı arttıkça düşük ortalama verici gücü değerleri için kesinti olasılığı belirgin bir biçimde optimum yöntem kullanılarak azaltılabilmektedir. Örneğin $M = 32$ ve $\rho/c = 0.02$ için, azami oransal birleştirme altında kesinti olasılığı 0.9973 olarak verilirken optimum güç paylaşımı ile kesinti olasılığı 0.5502'ye düşmektedir. Yine $M = 8$ ve $\rho/c = 0.03$ için, azami oransal birleştirme altında kesinti olasılığı 0.6146 olarak verilirken optimum güç paylaşımı ile kesinti olasılığı 0.3253'e düşmektedir. Ancak pratikte kesinti olasılığının 0.01'in altındaki değerleri önem taşıdığından, güç paylaşımı stratejisinden faydalanabilmek için çeşitlemede kullanılan anten sayısının artırılması gerekmektedir. Tablo 1'de optimum güç paylaşım yöntemine ait parametreler (büyük noktası $\hat{\rho}$, tanjant noktası ρ_t , tanjant noktasındaki kesinti olasılığı $P_{out}(\rho_t)$ ve tanjant noktasındaki eğim $P'_{out}(\rho_t)$) farklı M değerleri ve azami oransal ve seçmeli birleştirme yöntemleri için sunulmaktadır. Bu tablo kullanılarak, optimum sinyal iletim stratejisi şu şekilde belirlenebilir. Eğer ortalama güç kısıtı tanjant değerinden büyükse $\rho_{avg} > \rho_t$, ortalama güç değerinde sabit iletim yapılır. Ancak, ortalama güç kısıtının tanjant değerinden küçük olduğu durumlarda $\rho_{avg} \leq \rho_t$, iletim süresinin ρ_{avg}/ρ_t oranında ρ_t gücü ile iletim yapılırken kalan oransal süre boyunca iletim durdurulur. Bu sonuçlardan hareketle benzer güç rasgeleleştirme (paylaşım) yöntemlerinin yüksek boyutlardaki sinyal yıldız kümelerinde ortalama hata olasılığını da azaltmaya yardımcı oldukları hatırlanırsa [3], hem kesinti olasılığı hem de ortalama hata olasılığını optimum bir şekilde düşürecek güç paylaşım yöntemlerinin araştırılmasına ihtiyaç olduğu değerlendirilmektedir.

6. KAYNAKÇA

- [1] H. V. Poor, *An Introduction to Signal Detection and Estimation*, Springer-Verlag, NY, USA, 1994.

M	Azami Oransal Birleştirme			
	$\hat{\rho}$	ρ_t	$P_{out}(\rho_t)$	$P'_{out}(\rho_t)$
1	0.5000	1.0000	0.6321	-0.3679
2	0.3333	0.6180	0.4809	-0.8400
3	0.2500	0.4406	0.3959	-1.3711
4	0.2000	0.3395	0.3405	-1.9424
8	0.1111	0.1723	0.2295	-4.4720
16	0.0588	0.0838	0.1508	-10.1338
32	0.0303	0.0401	0.0981	-22.4987
64	0.0154	0.0191	0.0639	-48.9406
128	0.0078	0.0092	0.0418	-104.5459

M	Seçmeli Birleştirme			
	$\hat{\rho}$	ρ_t	$P_{out}(\rho_t)$	$P'_{out}(\rho_t)$
1	0.5000	1.0000	0.6321	-0.3679
2	0.4419	0.8252	0.4933	-0.6140
3	0.4066	0.7267	0.4175	-0.8015
4	0.3820	0.6619	0.3688	-0.9537
8	0.3272	0.5278	0.2716	-1.3802
16	0.2808	0.4253	0.2016	-1.8773
32	0.2430	0.3491	0.1529	-2.4267
64	0.2125	0.2924	0.1190	-3.0130
128	0.1880	0.2496	0.0951	-3.6247

Tablo 1: Optimal güç paylaşım stratejisine ait parametreler.

- [2] A. Goldsmith, *Wireless Communications*, Cambridge University Press, NY, USA, 2005.
- [3] S. Loyka, V. Kostina, and F. Gagnon, "Error Rates of the Maximum-Likelihood Detector for Arbitrary Constellations: Convex/Concave Behavior and Applications", *IEEE Trans. Info. Theory*, vol. 56, pp. 1948-1960, Apr. 2010.
- [4] M. Azizoglu, "Convexity properties in binary detection problems," *IEEE Trans. Info. Theory*, vol. 42, no. 4, pp. 1316-1321, July 1996.
- [5] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1968.