

Seyrek Geriçatma İçin Yeni Bir OMP Yöntemi

A New OMP Technique For Sparse Recovery

Oğuzhan Teke¹, Ali Cafer Gürbüz², Orhan Arıkan¹

Elektrik Elektronik Mühendisliği Bölümü
Bilkent Üniversitesi¹, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi²

o.teke@ug.bilkent.edu.tr, acgurbuz@etu.edu.tr, oarikan@ee.bilkent.edu.tr

ÖZETÇE

Sıkıştırılmış Algılama teorisi, bilinen bir tabanda seyrek olarak gösterilebilen bir sinyalin az sayıda ölçüm kullanılarak nasıl tekrar oluşturulabileceğini inceler. Ancak gerçekte, model hataları veya parametrelerin ayrıklaştırılması gibi nedenlerle varsayılan ile gerçek sinyal taban vektörleri arasında farklılık bulunur. Bu farklılıktan dolayı, gerçek tabandaki seyrek sinyal, varsayılan tabanda tam belirtilememekte ve geri çatım yöntemlerinin başarımları düşmektedir. Gerçek ve kullanılan taban vektörleri arasında farklılık olduğu durumlarda geri çatmanın başarımlarını artırmak amacıyla bu çalışmada, döngünün her aşamasında kullanılan sinyal uzayını kontrollü bir şekilde uyarlayan yeni bir dikey eşleyen takip tekniği önerilmektedir. Önerilen uyarlama tekniğinin her döngüde artık sinyal normunu küçülttüğü gösterilmiştir. Önerilen tekniğin üstün başarımları, detaylı benzetim çalışmalarıyla desteklenmiştir.

ABSTRACT

Compressive Sensing (CS) theory details how a sparsely represented signal in a known basis can be reconstructed using less number of measurements. However in reality there is a mismatch between the assumed and the actual bases due to several reasons like discretization of the parameter space or model errors. Due to this mismatch, a sparse signal in the actual basis is definitely not sparse in the assumed basis and current sparse reconstruction algorithms suffer performance degradation. This paper presents a novel orthogonal matching pursuit algorithm that has a controlled perturbation mechanism on the basis vectors, decreasing the residual norm at each iteration. Superior performance of the proposed technique is shown in detailed simulations.

1. GİRİŞ

Bilinmeyen bir sinyalin bilinen bir uzayda az sayıda bileşenle ifade edilebildiği durumlarda kullanılabilen Sıkıştırılmış Algılama(SA),[1, 2] teknikleri, ispatlanmış geri çatma özellikleri nedeniyle sinyal işleme alanına önemli bir kuramsal yenilik getirmiştir. Bilinmeyen x sinyali, N boyutlu bir uzayda

Bu çalışma TÜBİTAK tarafından 109E280 numaralı Kariyer projesi dahilinde ve FP7 Marie Curie Reintegration Grant çerçevesinde PIRG04-GA-2008-239506 numaralı proje tarafından desteklenmektedir.

978-1-4673-0056-8/12/\$26.00 ©2012 IEEE

yer alsın ve Ψ alanında, K -seyrek bir ifadesi olsun; $x = \Psi s$ ve $\|s\|_0 = K$. SA kuramında gösterilmiştir ki; $O(K \log N)$ sayıda, $b = \Phi x$ şeklinde ifade edilebilen doğrusal ölçüm verildiğinde, aşağıdaki dışbükey ℓ_1 en iyileme problemi çözülerek, s ve dolayısıyla x , doğru olarak geri çatılabilir [1, 2].

$$\min \|s\|_1, \quad \text{s.t. } b = \Phi \Psi s. \quad (1)$$

Bu problem, doğrusal programlama ile çözülebilir. Ayrıca hesaplama karmaşıklığı daha düşük algoritmalar da bir çok uygulamada kullanılmaktadır. Eşleyen Takip(MP) [3], Dikey Eşleyen Takip(OMP) [4], Sıkıştırılmış Algılama Eşleyen Takip(CoSaMP)[5], ve Döngülü Katı/Yumuşak Eşikleme(IHT)[6] bu algoritmalarından bazılarıdır.

Yukarıda bahsedilen geri çatım yöntemleri taban matrisinin, Ψ , tam olarak bilindiğini ve sinyalin o tabanda seyrek olduğunu varsaymaktadır. Ancak uygulamalarda, varsayılan ile gerçek taban arasında farklılık olabilmektedir. Örneğin hedef tespiti ve hüzme oluşturma [7], şekil bulma [8], radar [9] gibi uygulamalarda sinyal sürekli bir parametre uzayında seyrek ancak taban, ayrıklaştırılmış bir parametre uzayı kullanılarak oluşturulmuştur. Genel bir sinyal, bu ayrıklaştırılmış tabanda seyrek olmayacaktır. Örneğin; sürekli frekans alanında seyrek olan bir sinyal, ancak frekans ızgarasıyla tanımlanmış DFT tabanında seyrek olmayabilir. Ayrıca taban matrisi, Ψ , bir sistem modeli de tanımlar. Yapılan varsayımlardan ötürü modelleme hataları mevcuttur ve bunların hepsi birer bozulma olarak tabana yansır. Sonuç olarak x sinyali $\hat{\Psi} = \Psi + P$ gibi farklı bir tabanda seyrek olacaktır. Burada P ise bilinmeyen bir bozulma matrisidir.

Taban farklılığının etkileri birçok uygulamada gözlemlenmiştir. Ayrıklaştırma probleminde ızgara aralığının azalması, taban vektörleri arasındaki karşılıklı bağıdaşımı artıracak ve SA başarımının garantisini olan Kısıtlı Eş Ölçüm Özelliğini(RIP) [10], geçersiz kılacaktır. Dolayısıyla ızgara aralığını azaltarak gerçek taban ile kullanılan tabanı yaklaştırmak başka problemlere yol açmaktadır. [11, 12, 13]'deki çalışmalarda, taban farklılığının SA'nın performansı üzerine etkileri incelenmiş ve analitik ℓ_2 hata sınırları gösterilmiştir. Ancak bu çalışmalar, bozulmuş modeller altında geri çatımla ilgili sistematik yaklaşımlar sunmamaktadır.

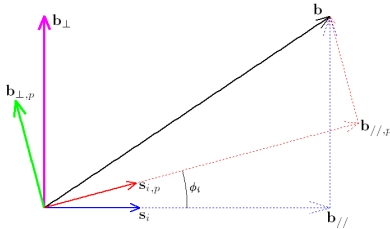
Bu çalışmada Uyarlamalı Dikey Eşleyen Takip (Perturbed Orthogonal Matching Pursuit: POMP) olarak adlandırılan yeni bir fırsatçı geriçatma tekniği sunulmaktadır. Standart

OMP algoritmasından farklı olarak POMP, her döngüde seçilen taban vektörlerini belirlenen sınırlar altında uyarlayarak ölçümlere uyum sağlamaya çalışmaktadır. Önerilen yöntem hızlı, gerçekleştirimi kolay ve taban bozulmaları altındaki geri çatımlarda başarılıdır.

2. Uyarlamalı Dikey Eşleme Takibi

Bu çalışmada önerilen uyarlamalı sıkıştırılmış algılama tekniği döngüsel olarak çalışan uyarlamalı bir eşleyen takip tekniğidir. Her döngüde giderek artan boyutta bir sinyal uzayında ölçümlere en iyi uyum sağlamaya çalışır. Bu nedenle her döngüde $b = Ax + n$ şeklinde eksik belirtilmiş bir denklem sistemi için çözüm üretilir. Burada $M < N$ olacak şekilde $A = [a_1 a_2 \dots a_N] \in \mathfrak{R}^{M \times N}$ ve $a_i \in \mathfrak{R}^M$, genel bir A taban matrisinin birim uzunlukta i . kolonudur.

Izgaralama veya sistem modellemesinden kaynaklanan sebeplerle b sinyali A 'nın kolonlarına göre seyrek olmayabilir ancak A 'nın uyarlanmış kolonları $a_{i,p}$ arasında seyrekliği sağlayabiliriz. a_i vektörünün üzerindeki ölçüm veya izgaralama hatasının en basit olarak modellenmesi $a_{i,p} = R_{\phi_i} a_i$ şeklinde yapılabilir. Burada R_{ϕ_i} herhangi bir yönde ϕ_i açısıyla döndürme operatörüdür. Bu dönme işlemi ile ilgili tek bilinen ϕ_i uyarlama açısının maksimum bir $\phi_{i,max}$ açısından küçük olduğudur. Uyarlamalı dikey eşleme takibi sırasında, verilen A 'nın kolon vektörlerinden giderek artan sayıda bir altkümesi kullanılarak b vektörüne yakınsama sağlanılmaya çalışılır. Bu aşamalar sırasında s_i , kullanılan altkümedeki i . vektördür. Şekil 1'de, ölçüm b 'nin, s_i üzerine dik izdüşümü $b_{//}$ ile gösterilmiştir. b_{\perp} ise bu izdüşümün dik kalanıdır.



Şekil 1: Tabanda yer alan bir vektörün verilen bir ölçüme uyarlanması.

s_i vektörünün aslında hatalı olabileceği bilindiği için s_i 'nin verilen ölçüm b kullanılarak uyarlanmasını sağlamak mümkündür. Bu amaçla, s_i ile b vektörleri arasındaki açının dar açılı olduğu durumlarda s_i vektörünü b_{\perp} 'e doğru döndürmek gereklidir. Aralarındaki açı geniş açı ise s_i vektörü $-b_{\perp}$ 'e doğru döndürülmelidir. Bu bakımdan

$$s_{i,p} = s_i \cos(\phi_i) + \widehat{b_{\perp}} \operatorname{sgn}(\alpha_i) \sin(\phi_i), \quad (2)$$

şeklinde bir uyarlama gerekmektedir. Burada s_i ve $\widehat{b_{\perp}} = b_{\perp} / \|b_{\perp}\|_2$ birim uzunlukta olduklarından $s_{i,p}$ de birim uzunluktadır. Tipik uygulamalarda A matrisinin i . kolonunun üzerindeki açısızlık için $\phi_{i,max}$ diye adlandırılan bir üst sınır bilinmektedir. Bu durumlarda (2)'de kullanılan uyarlama sırasında bu üst sınır aşılmamalıdır. Ancak böyle bir üst sınırın

bilinmediği durumda

$$\cos 2\phi_{i,max} = \max_{j \neq i} | \langle a_i, a_j \rangle | \text{ ve } i, j \in 1, 2, \dots, N, \quad (3)$$

şekilde maksimum bir sınır kullanılabilir. Bu sınır A matrisine ve N/M oranına göre değişecektir.

Bunun yanında her zaman verilen b ölçüm vektörü, takibin k . aşamasında $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ vektörlerinin doğrusal bileşimi ve bunlara dik bir kalanın toplamı şeklinde yazılabilir:

$$b = b_{\perp} + \sum_{i=1}^k \alpha_i s_i. \quad (4)$$

Burada ve (2)'deki α_i 'ler her bir taban vektörünün ağırlığını ifade etmektedir. (4)'teki ifade OMP gibi bir yöntemin k yinelenmesi ile elde edilebilir. s_i (2)'de verilen uyarlama yönteminin çekilip (4)'de yerine koyulursa:

$$b = b_{\perp} + \sum_{i=1}^k \alpha_i (s_{i,p} \sec(\phi_i) - \widehat{b_{\perp}} \operatorname{sgn}(\alpha_i) \tan(\phi_i)). \quad (5)$$

$$b = b_{\perp} \left[1 - \frac{1}{\|b_{\perp}\|_2} \sum_{i=1}^k \tan(\phi_i) |\alpha_i| \right] + \sum_{i=1}^k \alpha_i s_{i,p} \sec(\phi_i). \quad (6)$$

elde edilir. Denklem (6)'da görüldüğü gibi gözlem vektörü b uyarlanmış taban vektörleri cinsinden bir kalanla birlikte (7) gibi yazılabilir:

$$b = b_{\perp,p} + \sum_{i=1}^k \gamma_i s_{i,p}. \quad (7)$$

Burada $\sum_{i=1}^k \alpha_i s_{i,p} \sec(\phi_i)$ terimi, uyarlanmış taban vektörlerinin tamamen eriminde kalmaktadır. İlk terim ise sabit bir sayı ile uyarlanmamış tabandan kalan vektörün çarpımıdır. Bu kalan uyarlanmış tabanın eriminde kalan $b_{//,p}$ ve uyarlanmış tabanın erimine dik olan $b_{\perp,p}$ şeklinde iki dik bileşene ayrılabilir:

$$\begin{aligned} \|b_{\perp,p} + b_{//,p}\|_2 &= \left\| \left[1 - \frac{1}{\|b_{\perp}\|_2} \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \tan(\phi_i) \right] b_{\perp} \right\|_2 \\ &= \sqrt{\|b_{\perp,p}\|_2^2 + \|b_{//,p}\|_2^2}. \end{aligned}$$

$\|b_{//,p}\| \geq 0$ olduğu için,

$$\|b_{\perp,p}\|_2 \leq \|b_{\perp}\|_2 \left[1 - \frac{1}{\|b_{\perp}\|_2} \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \tan(\phi_i) \right]. \quad (8)$$

Amacımız, uyarlanmış tabandan kalanın uzunluğunun, $\|b_{\perp,p}\|_2$, uyarlanmamış tabandan kalan uzunluktan, $\|b_{\perp}\|_2$, küçük olmasıdır. O zaman (8)'de yer alan çarpan:

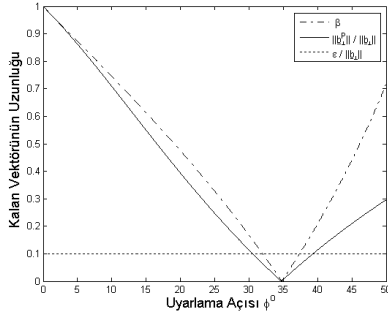
$$\beta = \left| \left[1 - \frac{1}{\|b_{\perp}\|_2} \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \tan(\phi_i) \right] \right|, \quad (9)$$

ϕ_i üzerinden, $\phi_i < \phi_{i,max}$ kısıtlamasını bozmayacak şekilde

en aza indirilmelidir. Bu çarpanın izin verilen uyarlama açısı sınırlarında sıfır değerine ulaşmadığı durumda üstsınır en küçültme probleminin çözümü

$$\tan \phi_i = \text{sgn}(\alpha_i) \tan \phi_{i,max}. \quad (10)$$

olarak bulunur. Eğer her taban vektörü için izin verilen en büyük uyarlama açısı aynı ise, $\phi_{i,max} = \phi_m$, bu durumda en iyi uyarlama açısı $\tan \phi_i = \text{sgn}(\alpha_i) \tan \phi_m$ olacaktır.



Şekil 2: Uyarlama Açısına bağlı kalan normu ve β Sınırı

Şekil 2’de sapma açısına bağlı dik kalanın normu $M = 100$ ve $k = 3$ için gösterilmiştir. Bu örnekte yaklaşık 35° ’lik bir uyarlama için β ’nın sıfıra indirildiği gözlenmektedir. Bu sınırın ötesinde tüm taban vektörleri için aynı uyarlama açısı kullandığımızı varsayarak izin verilebilecek en büyük uyarlama açısı ϕ^* ;

$$\beta = \left[1 - \frac{\tan(\phi^*)}{\|b_\perp\|_2} \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \right] = 0 \Rightarrow \phi^* = \tan^{-1} \left(\frac{\|b_\perp\|_2}{\sum_{i=1}^k |\alpha_i|} \right), \quad (11)$$

olarak bulunabilir. Gürültülü durumlarda istenilen kalanın uzunluğunun, $\|b_{\perp,p}\|_2$, sıfırlanması değil belirlenen bir ϵ değerinden küçük olmasıdır. Bu durumda maksimum uyarlama açısı

$$\left[1 - \frac{\tan(\phi_\epsilon^*)}{\|b_\perp\|_2} \sum_{i=1}^k |\alpha_i| \right] = \epsilon \Rightarrow \phi_\epsilon^* = \tan^{-1} \left(\frac{\|b_\perp\|_2(1-\epsilon)}{\sum_{i=1}^k |\alpha_i|} \right), \quad (12)$$

olmalıdır. Bu durumda kullanılacak uyarlama açısı hem taban matrisi tarafından tanımlanan $\phi_{i,max}$ hem de uyarlama sınır enküçültmesinden elde edilen ϕ_ϵ^* açılarından küçük olmalıdır. Yani $|\phi_i| \leq \min(\phi_{i,max}, \phi_\epsilon^*)$ olarak seçilmelidir. Bu uyarlama açısı kullanılarak OMP yönteminin her basamağında gerekli uyarlama işlemi gerçekleştirildiğinde seyrek sinyal geri oluşturulabilecektir. Geliştirilen uyarlamalı OMP (POMP) algoritması Tablo 1’de verilmiştir.

POMP algoritması A, b , durma kriteri ϵ ve uyarlama açısı ϕ_i değerlerini girdi olarak almaktadır. Verilen uyarlama açısı taban matrisinin tanımladığı $\phi_{i,max}$ değerinden küçük olmalıdır. POMP da OMP gibi boş bir sinyal uzayı ile yinelemeye başlayıp her adımda kalan vektörüyle en fazla ilişik ve o ana kadar seçilmemiş bulunan taban vektörünü sinyal dayanağına ekler. Eklenen vektörle beraber gerilen uzaya ölçüm vektörünün dik kalanının uzunluğu durma kriterinden büyükse POMP Tablo 1’deki uyarlama adımını gerçekleştirir. Algoritma durma kriteri

Tablo 1: POMP Algoritması

Girdi: A, b, ϵ ve ϕ_i
İklendirme: $b_{\perp,0} = b$ İlk kalan vektörü, $S_0 = \{\}$ Seçilmiş Set $e = \ b\ _2$ İlk hata uzunluğu, $k = 1$ Yineleme İndisi
Döngü içerisinde, $e < \epsilon$ oluncaya kadar tekrarla, OMP Kısmı: $U_k = A/S_{k-1}$, Tara $j^* = \arg \max_j u_j^T b_{\perp,k-1} $, Yeni bir kolon seç $S_k = S_{k-1} \cup \{u_{j^*}\}$, Dayanağı güncelle $x_k = S_k^\dagger b$, Yeni alt uzayda LS(En küçük kareler) $b_{\perp,k} = b - S_k x_k$, Yeni kalan Uyarlama Kısmı: Eğer $\ b_{\perp,k}\ _2 > \epsilon$ $\widehat{b}_{\perp,k} = b_{\perp,k} / \ b_{\perp,k}\ _2$, Kalanı Birimleştir $\phi^* = \arctan(\ b_{\perp,k}\ _2 / \ x_k\ _1)$, En büyük uyarlama $\phi^k = \min(\phi_{i,max}, \phi^*)$, Uyarlama açısı Bütün $i = 1$ to k için Dayanağı uyarla. $s_i^p = s_i \cos(\phi^k) + \widehat{b}_{\perp,k} \text{sgn}(\alpha_i) \sin(\phi^k)$ Tut ve Güncelle: $S_k(i) = s_i^p$, Uyarlanmış kolonları tut $r_k = (I - S_k^p S_k^{p\dagger})b$ Uyarlanmış dayanaktan kalan $e = \ r_k\ _2$ Uyarlanmış dayanakta kalanın uzunluğu k ’yi 1 arttır döngü için bitiş.
Çıktı: En küçük kareler çözümünü hesapla $x^* = S_k^{p\dagger} b$

sağlandığında sonlandırılır.

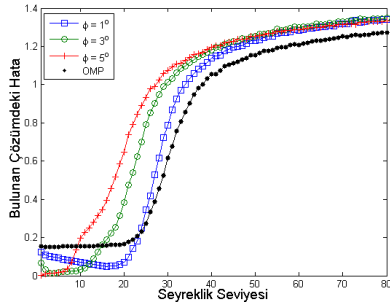
Önerilen POMP algoritmasının işlem karmaşıklığını belirleyen iki adımı vardır. Bunlar standart OMP algoritmasının işlem karmaşıklığı ile aynı olan $x_k = S_k^\dagger b$ ve $r_k = (I - S_k^p S_k^{p\dagger})b$ hesaplamasında kullanılan sözde ters işlemlerdir. Bu nedenle seyreklik değeri k için POMP algoritmasının işlem karmaşıklığı $O(k^3)$ ’dür, toplam işlem karmaşıklığı seyreklik 1’den başlayıp K ’ya kadar arttırıldığı durumda $O(K^4)$ olmaktadır. Bu standart OMP algoritmasıyla aynı seviyededir.

3. BENZETİMLER

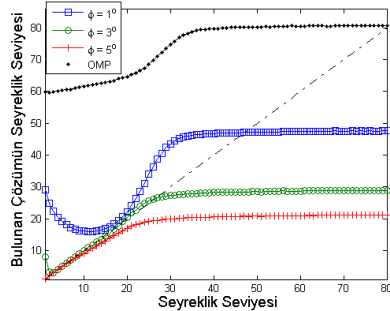
Bu bölümde, OMP ve POMP algoritmalarının ortalama başarımları karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma açısından SparseLab, [14], ’ın ’SolveOMP’ fonksiyonu OMP çözücü olarak kullanılmıştır. Taban matrisi 100×200 ve her bir değeri bağımsız özdeşçe dağılmış, birim varyansa, sıfır ortalamaya sahip Gauss dağılımı olarak seçilmiştir. Seyrek değerler sıfırdan uzak olacak şekilde, farklı seyrekliklerde sinyaller oluşturulmuş ve 5° civarında, $\mathcal{N}(5, 0.25)$, rastgele bir bozulmaya uğratılmış taban matrisi üzerinden gözlem sinyali oluşturulmuştur. SNR 40dB olacak şekilde gürültü eklenmiştir. POMP ve OMP çözücülerine gözlem sinyali ve bozulmuş taban matrisi verilmiştir. Bulunan seyrek sonuçlar, x^* , gerçek x ile karşılaştırılmıştır. Şekil 3, normalize edilmiş hatayı, $\frac{\|x^* - x\|_2}{\|x\|_2}$, Şekil 4, bulunan çözümlerin seyreklik seviyelerini, $\|x^*\|_0$, vermektedir. Şekil 5’de ise, bulunan dayanak ile gerçek dayanağın kesişiminin uzunluğunun gerçek dayanak uzunluğuna oranı, $\frac{\|S^* \cap S\|}{\|S^*\|}$, gösterilmektedir.

Şekil 3’de görüldüğü gibi POMP düzgülü çalışma bölge-

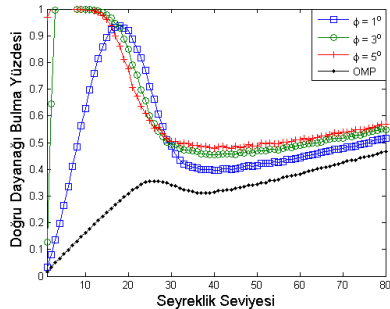
sinde OMP'den daha küçük bir hata ile sinyali geri çatabilmiştir. Şekil 4'de POMP'nin çalışma bölgesinde bulunduğu seyrekliğin doğru seyreklikle aynı olduğu gözükmektedir. Bu bölge dışında ise POMP, OMP'den çok daha seyrek sonuçlar bulmayı başarmıştır. Ne kadar çok uyarlamaya izin verilirse, bulunan sinyallerin de o kadar seyrek olduğu gözlenmiştir. Diğer önemli bir nokta ise bulunan dayanak vektörlerinin ne kadar bir doğrulukta bulunduğudır. Şekil 5'de görüldüğü üzere güvenilir sonuçların elde edildiği çalışma bölgesinde POMP yaklaşık olarak her zaman doğru dayanağı bulmayı başarmıştır. Bu sonuçlar, sistemin doğasında bulunan bozulmaların ve kaymaların izin verdiği ölçüde taban vektörlerinin uyarlanması, başarımı ne kadar arttırdığını göstermektedir.



Şekil 3: Seyrekliğe göre normalize geri oluşturma hatası.



Şekil 4: Gerçek seyrekliğe göre bulunan sonucun seyrekliği



Şekil 5: Gerçek seyrekliğe göre dayanağın doğru bulunma yüzdesi

4. SONUÇLAR

Bu makalede sinyalin seyrek olduğu varsayılan tabanlardaki model hataları veya parametrelerin ayrıklaştırılması gibi nedenlerden kaynaklanan bozulmaları da ele alınarak seyrek sinyal geriçatma için kullanılabilir bir uyarlamalı dikey eşleme takibi algoritması sunulmuştur. Takibin her aşamasında iyileştirme garantisine sahip uyarlama miktarının en iyi değerleri matematiksel olarak kapalı bir ifade ile elde edilmiştir. Benzetim sonuçlarında tabandaki bozulmaların varlığında dahi önerilen yöntemin gerçek sinyal seyrekliğinde ve doğru dayanağa sahip geri oluşturmalar gerçekleştirdiği gözlenmiştir.

5. KAYNAKÇA

- [1] D. Donoho, "Compressed sensing," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306, 2006.
- [2] E. Candes, J. Romberg, and T. Tao, "Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 52, pp. 489–509, 2006.
- [3] S. Mallat and Z. Zhang, "Matching pursuits with time-frequency dictionaries," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, 1993.
- [4] J. Tropp and A. Gilbert, "Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 53, no. 12, pp. 4655–4666, Dec. 2007.
- [5] D. Needell and J. A. Tropp, "Cosamp: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples," *Appl. Comp. Harmonic Anal.*, *arXiv math.NA 0803.2392*, 2008.
- [6] T. Blumensath and M. E. Davies, "Iterative hard thresholding for compressed sensing," *preprint*, 2008.
- [7] A. C. Gurbuz, V. Cevher, and J. H. McClellan, "A compressive beamformer," in *ICASSP 2008*, Las Vegas, Nevada, March 30–April 4 2008.
- [8] N. Aggarwal and W. C. Karl, "Line detection in images through Regularized Hough Transform," *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 15, pp. 582–590, 2006.
- [9] J. H. Ender, "On compressive sensing applied to radar," *Signal Processing*, vol. 90, no. 5, pp. 1402–1414, 2010.
- [10] R. Baraniuk, M. Davenport, R. DeVore, and M. Wakin, "A simple proof of the restricted isometry property for random matrices," *Constructive Approximation*, 2008.
- [11] M. Herman and T. Strohmer, "General deviants: An analysis of perturbations in compressed sensing," *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, vol. 4, no. 2, pp. 342–349, 2010.
- [12] Y. Chi, L. Scharf, A. Pezeshki, and R. Calderbank, "Sensitivity of basis mismatch to compressed sensing," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 59, pp. 2182–2195, 2011.
- [13] a. P. S. D. H. Chae and R. Kennedy, "Effects of basis-mismatch in compressive sampling of continuous sinusoidal signals," in *International Conference on Future Computer and Communication (ICFCC)*, 2010, pp. 739–743.
- [14] [Online]. Available: <http://sparselab.stanford.edu>