BİRLEŞİK SEZİM VE KESTİRİM SİSTEMLERİNİN GÜRÜLTÜ İLE GELİŞTİRİLMESİ
NOISE ENHANCEMENT IN JOINT DETECTION AND ESTIMATION SYSTEMS

Abdullah Başar Akbay, Sinan Gezici
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Bilkent Üniversitesi, Ankara 06800, Türkiye
{akbay, gezici}@ee.bilkent.edu.tr

***Özetçe* —Belirli koşullar altında, optimal olmayan bazı sezici ve kestiricilerin performansını girdilerine gürültü ekleyerek geliştirmek mümkündür. Bu çalışmada, birleşik bir sezim ve kestirim sisteminin gürültü eklenerek geliştirilmesi incelenmektedir. Sistem performansının maksimizasyonu bir optimizasyon problemi olarak tanımlanmaktadır. Optimal toplanır gürültü dağılımının istatiksel özellikleri belirlenmektedir. Sistem performansının gürültü ile iyileştirilemeyeceği bir koşul elde edilmektedir.Önerilen optimizasyon probleminin, bir doğrusal programlama (DP) problemi olarak yaklaşımı sunulmaktadır. Bir sayısal örnek üzerinde, kuramsal bulguları desteklemek amacıyla, gürültü eklenmiş sistem ile orijinal sistemin performansları karşılaştırılmaktadır.**

Anahtar Kelimeler—Sezim, kestirim, doğrusal programlama, gürültü ile geliştirilmiş sezim ve kestirim.

***Abstract*—Adding noise to inputs of some suboptimal detectors or estimators can improve their performance under certain conditions. In this study, a noise enhanced joint detection and estimation system is investigated. Maximization of the system performance is defined as an optimization problem. Statistical characterization of the optimal additive noise distribution is determined. A condition under which performance of the system cannot be improved is obtained. The proposed optimization problem is approximated as a linear programming (LP) problem. With an illustrative numerical example, a performance comparison between the noise enhanced system and the original system is performed to support the theoretical analysis.**

Keywords—Detection, estimation, linear programming, noise enhanced detection and estimation.

I. GİRİŞ

Sistemlerdeki gürültü artışı, genel olarak performans düşüşü ile ilişkilendirilse de belli durumlarda sisteme gürültü ekleyerek performans iyileştirilmesi sağlanabilir. Bu olgu stokastik rezonans (SR) olarak da isimlendirilmektedir. Gauss dağılımından farklı kanal gürültüsünde, optimal olmayan işaret sezimi kuramı uygulamalarında, gözlem işareti üzerine gürültü ekleyerek performans artışı gözlemlenebileceği önceki çalışmalarda gösterilmektedir [1]–[5]. Farklı yayınlarda SR olgusunun farklı hipotez sınama problemlerinin performansları üzerindeki etkileri incelenmektedir. [1]'de toplanır gürültünün Neyman-Pearson (NP) türü sezim problemlerinde, optimal olmayan sezicilerin performanslarında iyileştirmeler sağlayabileceği gösterilmektedir. Bu sonuç, SR etkisinin NP, kısıtlı NP ve kısıtlı Bayes kriterleri altında, bileşik hipotez sınama problemlerinde de gözlemlenebileceği sonucuna genelleştirilebilir [2]–[4]. Nicemleyici gürültüsünün, en büyük olabilirlik (ML) ve NP sezicilerini kullanan sezicilerde, sezimi iyileştirmesi mümkündür [5].

978-1-4799-4874-1/14/$31.00 ©2014 IEEE

Kestirim sistemlerinin performansı da SR etkisi ile geliştirilebilmektedir [6]–[8]. Gauss olmayan gürültüler ile Bayes kestiricilerinin performansının iyileştirilebileceği, aynı zamanda gürültü ile geliştirme tekniğinin kestirim sistemlerinde kullanıldığı ilk örnek olarak, [6]'da gösterilmektedir. Bu sonuç genel parametre kestirim problemine genişletilebilir [7]. Gürültü eklemenin kullanıldığı farklı bir örnek olarak kablosuz röle ağları için tanımlanan gözü kapalı hata oranı kestirim sistemleri de verilebilir [8].

Bu çalışmada, SR gürültüsünün [9]'da tanıtılmış bir birleşik sezim ve kestirim sistemi üzerindeki etkileri incelenmektedir. Ele alınan birleşik sistem için [9]'da optimal sezici ve kestiriciler elde edilmiştir. Ancak optimal sistemler uygulanabilirlik açısından fazlasıyla karmaşık olabilmektedir. Bu çalışmada verilen birleşik sistemin optimal olmadığı varsayılmaktadır ve bu varsayım altında ek gürültü ile performans artışı sağlanmaya çalışılmaktadır. Verilen sistemin optimal olacağı durumlarda ise gözlem işareti üzerine ek gürültü ekleyerek, optimal performans düzeyinin üzerinde bir iyileşme gözlemlemek mümkün değildir [10].

Sistemin yapısı değiştirilmeden, sadece girdisi olan gözlem işaretinin üzerine gürültü ekleyerek performansının iyileştirilmesi amaçlanmaktadır. Ele alınan sistemde kullanılan sezici ve kestiricinin üzerinde herhangi bir değişiklik yapılmamaktadır. Bu bildirinin devamında, temel problem, olası tüm ek gürültü dağılımlarının üzerinden, sistem performansını maksimize etmek olarak tanımlanmaktadır. Optimal Gürültü Dağılımı bölümünde, bu optimizasyon problemini çözen optimal gürültü dağılımının üç kütleli bir olasılık kütle fonksiyonu olduğu gösterilmektedir. Problemin çözümünü kolaylaştırmak amacıyla bir doğrusal programlama yaklaşımı sunulmaktadır. Kuramsal sonuçları desteklemek ve örneklendirmek amacıyla, tanımlanmış ve istatistikleri verilmiş belirli bir birleşik sistem üzerinde SR etkisi, sistemin orijinal performansı ile karşılaştırılmaktadır.

II. PROBLEM TANIMI

Ele alınan hipotez sınama problemi aşağıda ifade edilmektedir:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &: \ \boldsymbol{X} \sim f_0^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) \\ \mathcal{H}_1 &: \ \boldsymbol{X} \sim f_1^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\Theta}), \ \boldsymbol{\Theta} \sim \pi(\boldsymbol{\theta}) \end{aligned} \tag{1}$$

Denklem (1)'de $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^K$ gözlem işaretidir. $\boldsymbol{X}$ işaretinin, hipotez $\mathcal{H}_0$ ve hipotez $\mathcal{H}_1$ durumlarındaki istatistikleri biliniyor kabul edilmektedir. Ayrıca $\boldsymbol{\Theta}$ bilinmeyen parametresinin Λ parametre uzayı içerisindeki önsel dağılım fonksiyonu $\pi(\boldsymbol{\theta})$ ile verilmektedir. Hipotezlerin önsel olasılıkları $P(\mathcal{H}_0)$ ve $P(\mathcal{H}_1)$ ise bilinmemektedir.

Sezici, girdisi gözlemlenen işaret ve çıktısı hipotez $\mathcal{H}_1$ lehine karar verme olasılığı olan $\phi(\boldsymbol{x})$ fonksiyonu ile tanımlanmaktadır. Parametre $\boldsymbol{\Theta}$'nın kestirimi yalnızca hipotez $\mathcal{H}_1$ lehine karar verilirse, kestirim fonksiyonu $\hat{\theta}(\boldsymbol{x})$ kullanılarak yapılır. Hem sezim fonksiyonu $\phi(\boldsymbol{x})$ hem de kestirim fonksiyonu $\hat{\theta}(\boldsymbol{x})$ bilinmektedir. Sistem üzerinde yapılacak tek değişiklik gözlem işareti üzerine gürültü ekleme işlemine sınırlandırıldığı için bu iki fonksiyon da değiştirilemez kabul edilmektedir.

Önsel olasılıkların bilinmediği bu gibi problemler, Neyman-Pearson (NP) yaklaşımı kapsamında bir sınama problemi olarak görülmektedir [11]. NP türü problemlerde, doğru hipotezin $\mathcal{H}_1$ olduğu durumlarda yine $\mathcal{H}_1$ lehine karar verme olayının olasılığı olarak tanımlanan sezim olasılığı $P_1^{\boldsymbol{x}}(\hat{\mathcal{H}}_1) \coloneqq P(\hat{\mathcal{H}}_1|\boldsymbol{X}{=}\boldsymbol{x}, \mathcal{H}_1)$ performans ölçütü olarak değerlendirilmektedir. Kısıt olarak ise gerçek hipotezin hipotez $\mathcal{H}_0$ olduğu durumlarda, hipotez $\mathcal{H}_1$ lehine karar verme olayının olasılığı $P_0^{\boldsymbol{x}}(\hat{\mathcal{H}}_1) \coloneqq P(\hat{\mathcal{H}}_1|\boldsymbol{X}{=}\boldsymbol{x}, \mathcal{H}_0)$ olarak tanımlanan yanlış kabul olasılığı kabul edilmektedir. Bu tanımlanan düzenekte, bu ölçütlerin ifadeleri ise aşağıdaki şekilde [9] verilmektedir:

$$P_0^{\boldsymbol{x}}(\hat{\mathcal{H}}_1) = \int_{\mathbb{R}^K} \phi(\boldsymbol{x}) f_0^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2}$$

$$P_1^{\boldsymbol{x}}(\hat{\mathcal{H}}_1) = \int_{\Lambda}\int_{\mathbb{R}^K} \phi(\boldsymbol{x})\pi(\boldsymbol{\theta}) f_1^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\Theta})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \tag{3}$$

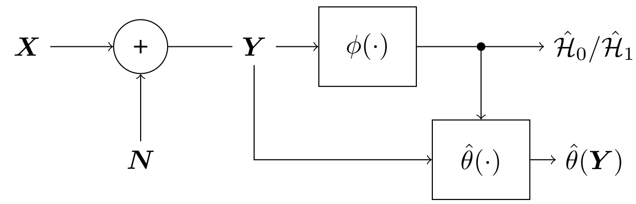
Kestirim maliyet fonksiyonu $c(\boldsymbol{\theta}, \hat{\theta}(\boldsymbol{x}))$, parametrenin gerçek değeri ile kestirimin sonucu elde edilen değerin arasındaki farklılık üzerinden tanımlanır. Parametre dağılımının bilindiği problemlerde, kestirim maliyet fonksiyonunun gözlem işareti $\boldsymbol{X}$ ve parametre $\boldsymbol{\Theta}$ dağılımları üzerinden beklenti değeri $E\{c(\boldsymbol{\theta}, \hat{\theta}(\boldsymbol{x})\}$ bulunarak, kestiricinin performansını değerlendirmek amacıyla Bayes risk fonksiyonu bulunur [11]. Ancak bu problemde, hipotezlerin önsel olasılıkları bilinmediği için, sistemin genel Bayes risk fonksiyonu hesaplanamamaktadır. Bu noktadan hareketle, [9]'de ifade edilen, $\mathcal{H}_1$ hipotezinin doğru olduğu ve yine $\mathcal{H}_1$ hipotezinin lehine karar verildiği koşullarıyla tanımlanan $E\{c(\boldsymbol{\theta}, \hat{\theta}(\boldsymbol{x}))|\mathcal{H}_1, \hat{\mathcal{H}}_1\}$ koşullu Bayes risk fonksiyonu, kestirim risk fonksiyonu $K^{\boldsymbol{X}}(\phi, \hat{\theta})$ olarak benimsenmektedir.

$$K^{\boldsymbol{X}}(\phi, \hat{\theta}) = \frac{\int_{\Lambda}\int_{\mathbb{R}^K} c(\boldsymbol{\theta}, \hat{\theta}(\boldsymbol{x}))\phi(\boldsymbol{x}) f_1^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\Theta})\pi(\boldsymbol{\theta})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\int_{\Lambda}\int_{\mathbb{R}^K} \phi(\boldsymbol{x})\pi(\boldsymbol{\theta}) f_1^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\Theta})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}} \tag{4}$$

Bu çalışmadaki temel amaç, yukarıda bahsedilen birleşik sezim ve kestirim sisteminin yapısı değiştirilmeden, gözlem işaretine gürültü ekleyerek sistem performansının iyileştirilmesidir.

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{N} \tag{5}$$

Mevcut bulunan sisteme $\boldsymbol{Y}$ (5) işareti girdi olarak verilmektedir. Ana problem, $\boldsymbol{N}$ rastsal değişkeninin tüm dağılımları arasından, sistem performansını kısıtlara bağlı olarak optimize etmektir. $\boldsymbol{N}$ rastsal değişkeninin, asıl gözlem işareti $\boldsymbol{X}$'ten istatiksel olarak bağımsız olduğu varsayılmaktadır.



Şekil 1: Gürültü eklenmiş birleşik sezim ve kestirim sistemi

Bu değişiklikten sonra; yanlış kabul olasılığı $P_0(\hat{\mathcal{H}}_1){=}E\{T(\boldsymbol{n})\}$, sezim olasılığı $P_1(\hat{\mathcal{H}}_1){=}E\{R(\boldsymbol{n})\}$ ve kestirim risk fonksiyonu $K(\phi, \hat{\theta}){=}E\{G(\boldsymbol{n})\}/E\{R(\boldsymbol{n})\}$; yeni tanımlanan $T(\boldsymbol{n})$ (6), $R(\boldsymbol{n})$ (7) ve $G(\boldsymbol{n})$ (8) fonksiyonlarının N rastsal parametresi üzerinden beklenti değerleri olarak ifade edilebilirler. N rastsal değişkeninin belirli bir değer $\boldsymbol{n}_0$'ya sahip olduğu durumda ($f_N(\boldsymbol{n}) = \delta(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n_0})$), $R(\boldsymbol{n}_0)$, $T(\boldsymbol{n}_0)$ and $G(\boldsymbol{n}_0)\big/R(\boldsymbol{n}_0)$ sırasıyla değiştirilen yeni sistemin sezim olasılığı, yanlış kabul olasılığı ve koşullu kestirim risk değerine karşılık gelmektedir.

$$T(\boldsymbol{n}) = \int_{\mathbb{R}^K} \phi(\boldsymbol{y}) f_0^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{N})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} \tag{6}$$

$$R(\boldsymbol{n}) = \int_{\Lambda}\int_{\mathbb{R}^K} \phi(\boldsymbol{y})\pi(\boldsymbol{\theta}) f_1^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{N}|\boldsymbol{\Theta})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \tag{7}$$

$$G(\boldsymbol{n}) = \int_{\Lambda}\int_{\mathbb{R}^K} c(\theta(\boldsymbol{y}), \theta)\phi(\boldsymbol{y})\pi(\boldsymbol{\theta}) f_1^{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y}{-}\boldsymbol{N}|\boldsymbol{\Theta})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta} \tag{8}$$

Bu noktaya kadar anlatıldığı üzere, tanıtılan sistemin performansını değerlendirmede kullanılabilecek temel anlamda üç adet fonksiyon bulunmaktadır. Uygulamaya bağlı olarak, iki tanesi kısıt olarak belirlenerek, kalan üçüncüsünün optimize edilebilir. Bu çalışmada, yanlış kabul olasılığı ve kestirim risk değerleri üzerine üst sınırlar konularak, sezim olasılığının maksimize edilmesi amaçlanmaktadır (9).

$$\underset{f_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{n})}{\textbf{maks}}\; E\{R(\boldsymbol{n})\} \text{ öyle ki } E\{T(\boldsymbol{n})\} \leq \alpha \text{ ve } \frac{E\{G(\boldsymbol{n})\}}{E\{R(\boldsymbol{n})\}} \leq \gamma. \tag{9}$$

III. OPTİMAL GÜRÜLTÜ DAĞILIMI

(9)'da verilen optimizasyon problemi, bütün olabilecek olasılık dağılımları arasında bir arama yapmayı gerektirmektedir. Optimal gürültü dağılımının yapısının bilinmesi durumunda, optimizasyon probleminin çözümü daha da basitleştirilebilir. Sadece seziciden oluşan ikili bir NP hipotez sınama problemi için, eniyi gürültü dağılımının, en fazla iki elemanlı bir değer kümesine sahip olan bir olasılık kütle fonksiyonu (PMF) olduğu Carathéodory teoremi kullanılarak gösterilmektedir [1]. Bulunan bu sonuç, [2]–[4]'te (M-1) sayıda kısıt fonksiyonu içeren hipotez sınama problemleri için optimal gürültü dağılımının M sayıda kütleden oluşan bir olasılık kütle fonksiyonu olduğu gösterilerek daha da genişletilmiştir. Benzeri şekilde, (9)'da tanımlanan eniyileme problemi (9) iki kısıt fonksiyonuna (yanlış kabul olasılığı (2) ve koşullu kestirim risk fonksiyonu (4)) sahiptir. Buna bağlı olarak optimal gürültü dağılımı en fazla 3 sayıda kütleden oluşan bir olasılık kütle fonksiyonu olarak ifade edilmektedir:

Önerme 1. *a_i ve b_i sonlu büyüklükteki sayıları için Z kümesi $Z = \{\boldsymbol{z} = (z_0, z_1, ..., z_{K-1}) : z_i \in [a_i, b_i], i = 1, 2, ...K\}$ olarak tanımlansın ve ek gürültü vektörünün Z kümesi içerisinden değerler alabileceği varsayılsın. U kümesi ise $U = \{\boldsymbol{u}{=}(u_0, u_1, u_2) : u_0{=}R(\boldsymbol{n}), u_1{=}T(\boldsymbol{n}), u_2{=}G(\boldsymbol{n}), \boldsymbol{n} \in Z\}$ şeklinde tanımlansın. Eğer U kümesi, $\mathbb{R}^K$ uzayı içerisinde, sonlu ve kapalı bir küme ise; problem (9)'u çözen $f_{\boldsymbol{N}}(\boldsymbol{n})$ fonksiyonu aşağıdaki forma sahiptir:*

$$f_N(\boldsymbol{n}) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \delta(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n_i}) \tag{10}$$

Önerme 1'in ispatı yer kısıtlamasından dolayı sunulamamaktadır. Önerme 1'de eklenecek gürültünün elemanlarının alabileceği değerler sonlu ve kapalı bir kümeye sınırlandırılmaktadır. Uygulamada, bu aralık değerleri yeterince büyük seçilebileceği için bu varsayımın gürülte ekleme performansını düşürecek bir etki oluşturabileceği düşünülmemelidir. İkinci olarak ise, gerçek hayat uygulamalarında, (9)'da verilen optimizasyon problemi çözülürken, eklenecek gürültü değerlerinin sonsuz bir küme içerisinde aranması mümkün olmayacaktır. Bu sebeple yapılan varsayım gerçekçi ve gerekli olarak değerlendirilmelidir.

Aşağıdaki önermede bir iyileştirilememe koşulu verilmektedir. Bu koşul sağlanırsa, sistem performansının gürültü eklenerek iyileştirilmesi mümkün olmamaktadır.

Önerme 2. *$\check{Z}$ üzerine herhangi bir koşul konulmaksızın, ek gürültü vektörünün $\check{Z}$ kümesi içerisinden değerler alabileceği varsayılsın. Eğer eşitsizlik (11)'i tüm $\boldsymbol{n} \in \check{Z}$ için sağlayan negatif β_1 ve β_2 gerçel sayıları varsa, sistem performansı gürültü eklenerek iyileştirilemez.*

$$R(\boldsymbol{n})(1 - \gamma\beta_2) + \beta_2 G(\boldsymbol{n}) + \beta_1(T(\boldsymbol{n}) - \alpha) - R(0) \leq 0 \tag{11}$$

İspat: Eşitsizliğin iki tarafının da N'nin herhangi bir dağılımı üzerinden beklenti değeri hesaplansın. Elde edilen eşitsizlik $E\{R(\boldsymbol{n})\} - R(0) \leq \beta_1(\alpha - E\{T(\boldsymbol{n})\}) + \beta_2(\gamma E\{R(\boldsymbol{n})\} - E\{G(\boldsymbol{n})\})$ olarak ifade edilebilir. Optimizasyon problemi (9)'u çözecek herhangi bir dağılımın belirtilen kısıtları karşılaması gerektiğinden eşitsizliğin sağ tarafı her zaman sıfırdan küçük ya da sıfıra eşit olacaktır. Bu sebeple sezim olasılığı $E\{R(\boldsymbol{n})\}$ her zaman sistemin gürültü eklenmediği haliyle sahip olduğu sezim olasılığı değeri olan $R(0)$'dan küçük ya da $R(0)$'ya eşit olacaktır.

IV. DOĞRUSAL PROGRAMLAMA YAKLAŞIMI

Tanımlanan optimizasyon probleminin (9) özellikleri verilen birleşik sezim ve kestirim sistemi ile birlikte parametre $\boldsymbol{\Theta}$'nın ve asıl gözlem sinyali $\boldsymbol{X}$'in istatistiklerine bağlıdır. Bu sebeple dışbükey bir problem olarak genellenemezler. Bütünsel optimizasyon yöntemleri kullanılarak, belirli sayısal örnekler için çözüm bulunabilir. Ancak problemin karmaşıklığını azaltmak ve gerçek hayat uygulamalarında kullanılabilirliğini değerlendirmek adına bir doğrusal programlama yaklaşımı aşağıda incelenmektedir.

Doğrusal programlama (DP) problemleri, dışbükey optimizasyon problemlerinin özel bir durumudur. Polinomsal zamanda çözülebilirler ve bütünsel eniyileme yöntemlerine göre daha düşük hesaplama karmaşıklığına sahiptirler [12]. Gerçek hayat uygulamalarında, eklenecek olan gürültü değerlerinin sürekli bir aralıktan değer almaları mümkün olmayacaktır. Bu sebeple eklenecek gürültü değerlerinin ayrık bir kümeden değerler aldığı bu durumu incelemek ayrıca bir gereklilik oluşturmaktadır.

Önerilen DP yaklaşımında, eklenen gürültü rastsal değişkeninin olasılıksal dağılım fonksiyonun değer kümesi sonlu bir $S{=}\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \cdots, \mathbf{n}_M\}$ kümesine sınırlanmıştır. $T(\mathbf{n})$ (6), $R(\mathbf{n})$ (7) ve $G(\mathbf{n})$ (8) fonksiyonlarının alabileceği değerler (M) sütun vektörleri olarak ifade edilebilir. Beklenti bulma işlemi ise bu sütun vektörlerinin elemanlarının, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_M$ ağırlıklarıyla dışbükey kombinasyonuna basitleşmektedir. DP problemlerinin çözümleri sonucunda elde edilecek en büyük değer, bütünsel eniyileme yöntemlerinin sonucundan küçük ya da eşit olacaktır. İki değer arasındaki aralık, N gürültü rastsal değişkeninin alabileceği değerlerin sayısına (M) bağlıdır. DP problemi aşağıda ifade edilmektedir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}^\mathsf{T} &= [T(\mathbf{n_1})\ T(\mathbf{n_2})\ \cdots\ T(\mathbf{n_M})] \\
\mathbf{g}^\mathsf{T} &= [G(\mathbf{n_1})\ G(\mathbf{n_2})\ \cdots\ G(\mathbf{n_M})] \\
\mathbf{r}^\mathsf{T} &= [R(\mathbf{n_1})\ R(\mathbf{n_2})\ \cdots\ R(\mathbf{n_M})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underset{\boldsymbol{\lambda}}{\text{maximize}} \quad & \mathbf{r}^\mathsf{T}\boldsymbol{\lambda} \\
\text{subject to} \quad & (\mathbf{g}^\mathsf{T} - \gamma\mathbf{r}^\mathsf{T})\boldsymbol{\lambda} \leq 0, \\
& \mathbf{t}^\mathsf{T}\boldsymbol{\lambda} \leq \alpha, \\
& \mathbf{1}^\mathsf{T}\boldsymbol{\lambda} = 1, \\
& \boldsymbol{\lambda} \succeq 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

V. SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde, önceki bölümlerde anlatılan kuramsal çalışmaların sayısal bir örnek üzerindeki sonuçları incelenmektedir. $T(\mathbf{n})$ (6), $R(\mathbf{n})$ (7) ve $G(\mathbf{n})$ (8) fonksiyonlarının bu örnek için analitik olarak açık şekilde ifade edilmeleri mümkün değildir. Önerme 1 ile birlikte sayısal yöntemler kullanılarak optimal çözümüne ulaşılmaktadır. Benzer şekilde DP problemi de sayısal yöntemlerle çözülebilmektedir. Optimal çözüm ile DP çözümünden gelen sonuçların karşılaştırılması verilmiştir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0 &: \ X = \epsilon \\
\mathcal{H}_1 &: \ X = \epsilon + \Theta
\end{aligned} \tag{13}$$

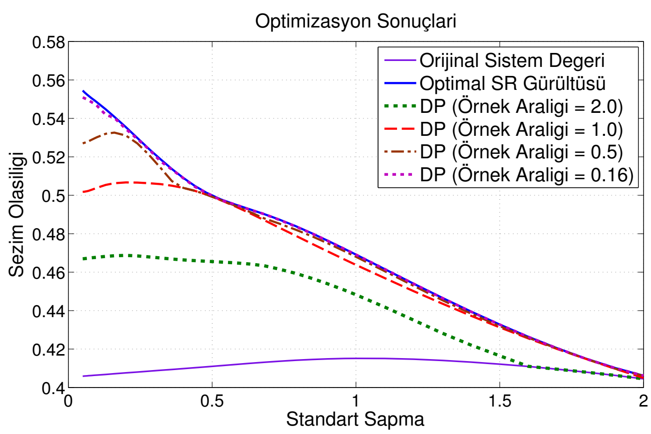
Bu örnekte, asıl gözlem işareti X, parametre Θ ve kanal gürültüsü ϵ skaler değerler almaktadırlar. Θ Gauss dağılımına, ϵ Gauss karışım dağılımına sahiptir. ϵ değişkeninin Gauss karışım dağılımındaki elemanları [-3.5 -2.0 -0.80 0.40 2.40 4.5] ortalama değerlerine ve [0.35 0.10 0.10 0.05 0.15 0.25] ağırlıklarına sahiptir. Hepsinin standart sapması ise birbirine eşittir. Θ parametresinin ortalama değeri 3.5, standart sapma değeri ise 1'dir. Karar kuralı basit eşik sezimidir, $\hat{\theta}(x) = x$ ise bu örnekteki kestirim fonksiyonunu ifade etmektedir. Kestirim maliyet fonksiyonu ise aşağıdaki 0-1 kayıp fonksiyonudur:

σ = 0.15	$f_N^{opt}(\boldsymbol{n})$ Kütle Ağırlıkları			$f_N^{opt}(\boldsymbol{n})$ Kütle Konumları			$E\{T(\boldsymbol{n})\}$	$\frac{E\{G(\boldsymbol{n})\}}{E\{R(\boldsymbol{n})\}}$	$E\{R(\boldsymbol{n})\}$
DP (2.00)	0.7273	0.2727	0.0000	-2.0000	6.0000	0.0000	0.1500	0.9535	0.4684
DP (1.00)	0.6499	0.2423	0.1078	-1.0000	4.0000	5.0000	0.1500	0.9750	0.5061
DP (0.50)	0.6559	0.1724	0.1717	-0.5000	4.0000	5.0000	0.1500	0.9750	0.5326
DP (0.16)	0.6624	0.0998	0.2378	-0.4000	3.7600	5.0400	0.1500	0.9750	0.5411
Optimal. SR	0.6671	0.0975	0.2354	-0.3614	3.8337	5.0628	0.1500	0.9750	0.5422

Tablo I: (9)'da tanımlanan optimizasyon probleminin ve (12)'de verilen doğrusal programlama problemleminin farklı aralık değerleriyle, 0.15 standart sapma değeri için çözümleri (gürültü eklenmemiş haliyle orijinal sistem değerleri: $T(0) = 0.1500$, $G(0)/R(0) = 0.9750$ ve $R(0) = 0.4070$)

$$C(\theta, \hat{\theta}(x)) = \begin{cases} 1 & |\hat{\theta}(x) - \theta| > 0.5, \\ 0 & |\hat{\theta}(x) - \theta| \leq 0.5. \end{cases} \tag{14}$$

(9)'da verilen optimizasyon problemi, farklı standart sapma değerleri için çözülmektedir . Her bir standart sapma değeri için, eşik değeri, sezicinin yanlış kabul olasılığını 0.15'e eşitleyecek şekilde hesaplanmaktadır (sabit yanlış kabul olasılığı). Optimizasyon problemi (9) içerisinde tanıtılan α ve β üst sınırları sırasıyla $T(0)$ ve $G(0)/R(0)$ olarak alınmaktadır. Diğer bir deyişle, gürültü eklenmiş sistemin yanlış kabul olasılığı ve koşullu kestirim risk değerlerinin, eklenmemiş durumundaki değerlerine eşit veya daha küçük olması gerekmektedir. Eklenen gürültü rastsal değişkenin değer kümesi ise $[-10, 10]$ olarak seçilmektedir.



Şekil 2: Sezim Olasılığının Maksimizasyonu

Şekil 2 üzerinde, sistemin gürültü eklenmiş durumdaki sezim olasılığı, sezicinin gürültü eklenmemiş durumdaki orijinal sezim olasılığı değerleri ile birlikte karşılaştırılarak gösterilmektedir. Performanstaki iyileşmenin standart sapma değeri yükseldikçe azaldığı görülmektedir. Diğer bir deyişle bu örnekte, gürültü eklenerek iyileştirme olgusu, yüksek işaret-gürültü oranı olan bölgede daha etkilidir.

Şekil 2 üzerinde doğrusal programlama yaklaşımının performansı da optimal çözümün ortaya koyduğu sezim olasılığı değerleri ile birlikte gösterilmektedir. DP gürültü örnekleri, gürültü rastsal değişkeninin değer kümesinden, $2.0, 1.0, 0.5$ ve 0.16 aralık değerleri ile alınmıştır. Şekil 2'den görüleceği üzere DP yaklaşımının doğruluğu aralık değeri ile yakından ilişkilidir. 2.0 ve 1.0 gibi geniş gürültü örnek aralıkları ile dahi dikkate değer bir iyileşme elde etmenin mümkün olduğu görülmektedir. 0.16 örnek aralığı için ise DP yaklaşımı, optimal eğri ile neredeyse çakışmış durumdadır.

Tablo I'de, 0.15 standart sapma değeri için, optimizasyon problemi (9) ve doğrusal programlama problemi (12)'nin, çözümleri verilmektedir. Önerme 1'e göre, (9)'un optimal çözümleri, 3 kütleli bir kütle olasılık fonksiyonu olması gerektiği ifade edilmektedir. Bu örnek üzerinde, bu önermenin doğrulandığı görülmektedir. Doğrusal programlama yaklaşımında, örnekler arasındaki aralık daraldıkça, DP çözümünün optimal çözüme yaklaşması beklenmektedir. Tablo I'de verilen değerler bu değerlendirmeyi doğrular niteliktedir. Önerme 1, sadece (9)'u çözen optimal ek gürültü dağılımını belirlediği ve DP problemine doğrudan uygulanamayacağı halde, optimal λ^* değerlerinin de 3 kütleli bir dağılım gösterdiği Tablo I'de görülmektedir. Optimal λ^* LP çözümlerinin, bu kütle noktaları dışında da sıfırdan büyük elemanları bulunmaktadır. Ancak çok küçük ve ihmal edilebilir olan bu değerler herhangi bir pratik anlam taşımamaktadır.

(12)'de verilen doğrusal programlama yönteminin, (9)'da tanımlanan optimizasyon probleminin yaklaşımında kullanılmaya uygun olduğu görülmektedir. Bu önemli gözlem, gürültü ile geliştirilmiş sistemlerin, gerçek hayat uygulamalarında kullanılmasına da imkan tanımaktadır.

KAYNAKÇA

[1] H. Chen, P. K. Varshney, J. H. Michels, ve S. M. Kay, "Theory of the stochastic resonance effect in signal detection: Part I — Fixed detectors," *IEEE Trans. Sig. Processing*, vol. 55, pp. 3172–3184, July 2007.

[2] S. Bayram ve S. Gezici, "Stochastic resonance in binary composite hypothesis-testing problems in the neyman-pearson framework," *Digital Signal Processing*, vol. 22, pp. 391–406, May 2012.

[3] S. Bayram, S. Gultekin, ve S. Gezici, "Noise enhanced hypothesis-testing according to restricted neyman–pearson criterion," *Digital Signal Processing*, vol. 25, pp. 17 – 27, Feb. 2014.

[4] S. Bayram, S. Gezici, ve H. V. Poor, "Noise enhanced hypothesis-testing in the restricted bayesian framework," *IEEE Trans. Sig. Processing*, vol. 58, pp. 3972–3989, Aug. 2010.

[5] A. Patel ve B. Kosko, "Noise benefits in quantizer-array correlation detection and watermark decoding," *IEEE Trans. Sig. Processing*, vol. 59, pp. 488–505, Feb. 2011.

[6] F. Chapeau-Blondeau ve D. Rousseau, "Noise-enhanced performance for an optimal bayesian estimator," *IEEE Trans. Sig. Processing*, vol. 52, pp. 1327–1334, May 2004.

[7] H. Chen, P. K. Varshney, ve J. H. Michels, "Noise enhanced parameter estimation," *IEEE Trans. Sig. Processing*, vol. 56, pp. 5074–5081, Oct. 2008.

[8] J.-Y. Liu ve Y.-T. Su, "Noise-enhanced blind multiple error rate estimators in wireless relay networks," *IEEE Trans. Veh. Tech.*, vol. 61, pp. 1145–1161, March 2012.

[9] G. V. Moustakides, G. H. Jajamovich, A. Tajer, ve X. Wang, "Joint detection and estimation: Optimum tests and applications," *IEEE Trans. Inform. Theory*, July 2012.

[10] A. Patel ve B. Kosko, "Optimal noise benefits in neyman pearson and inequality-constrained statistical signal detection," May 2009.

[11] H. V. Poor, *An Introduction to Signal Detection and Estimation*. New York: Springer-Verlag, 1994.

[12] S. P. Boyd ve L. Vandenberghe, *Convex Optimization*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.