

## Seyrek Sinyallerin Geri Çatımına Özyineli Bir Yaklaşım

### A Recursive Approach to Reconstruction of Sparse Signals

Oguzhan Teke, Orhan Arıkan  
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü  
Bilkent Üniversitesi  
{teke,oarikan}@ee.bilkent.edu.tr

Ali Cafer Gurbuz  
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü  
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi  
acgurbuz@etu.edu.tr

**Özetçe** —Sıkıştırılmış Algılama (SA) kuramı, bilinen bir tabanda seyrek olan bir sinyalin az sayıda ölçüm ile nasıl geri çatılacağını inceler. Çoğu pratik sistemdeki ölçüm sinyallerinin sürekli bir parametre uzayında seyrek bir tanıma sahip olması, SA kuramı altında geliştirilmiş tekniklerin kullanılabilme olasılığını ortaya çıkarır. Ancak, SA tekniklerinin uygulanabilmesi için sürekli parametre uzayının ayrıklaştırılması gerekir. Bu ayrıklaştırma sonucunda da iyi bilinen ızgara-dışılık problemi ortaya çıkar. Izgara-dışılık problemini engellemek için bu çalışmada, parametre alanını değişken ve uyarlamalı bir şekilde ayrıklaştıran özyineli bir yaklaşım sunulmuştur. Önerilen yaklaşımın çok yakın şekilde konumlanmış hedefleri dahi yüksek hassasiyetle kestirebildiği benzetim çalışmalarıyla gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler**—Sıkıştırılmış Algılama, Taban Uyumsuzluğu, Özyineli Çözüm

**Abstract**—Compressive Sensing (CS) theory details how a sparsely represented signal in a known basis can be reconstructed using less number of measurements. In many practical systems, the observation signal has a sparse representation in a continuous parameter space. This situation rises the possibility of use of the CS reconstruction techniques in the practical problems. In order to utilize CS techniques, the continuous parameter space have to be discretized. This discretization brings the well-known off-grid problem. To prevent the off-grid problem, this study offers a recursive approach which discretizes the parameter space in an adaptive manner. The simulations show that the proposed approach can estimate the parameters with a high accuracy even if targets are closely spaced.

**Keywords**—Compressive Sensing, Basis Mismatch, Recursive Solution

## I. GİRİŞ

Bilinmeyen bir sinyalin bilinen bir uzayda az sayıda bileşenle ifade edilebildiği durumlarda kullanılabilen Sıkıştırılmış Algılama (SA), [1], [2] teknikleri, belirli şartların sağlandığı durumda geçerli olan ispatlanmış geri çatma özellikleri nedeniyle sinyal işleme alanına önemli bir kuramsal yenilik getirmiştir. Bilinmeyen  $s$  sinyali,  $N$  boyutlu bir uzayda yer alsın ve  $\Psi$  alanında,  $K$ -seyrek bir ifadesi olsun:  $s = \Psi x$  ve  $\|x\|_0 = K$ . SA kuramında gösterilmiştir ki,  $O(K \log N)$  sayıda,  $y = \Phi s$  şeklinde ifade edilebilen doğrusal ölçüm verildiğinde, aşağıdaki problemin çözümü ile istenilen  $x$  ve dolayısıyla  $s$ , doğru olarak geri çatılabilir.

$$\min \|x\|_0, \quad \text{öyle ki} \quad y = \Phi \Psi x = Ax. \quad (1)$$

Eşitlik 1'deki problemin çözümü,  $\ell_0$  sözde-normunun süreksiz yapısı nedeniyle kombinatorik bir arama gerektirir ve küçük ölçekli problemlerde dahi pratiklikten çok uzak hesapsal karmaşıklığa sahiptir. [1]'da gösterildiği üzere, objektif fonksiyondaki  $\ell_0$  sözde-normu,  $\ell_1$  normuyla değiştirildiğinde elde edile problem, dışbükey bir yapıdadır ve belli şartlar altında Eşitlik 1'deki problemin çözümünü verir. Ölçüm gürlütsü de hesaba katıldığında bu dışbükey problem şu şekilde tanımlanır:

$$\min \|x\|_1, \quad \text{öyle ki} \quad \|y - Ax\|_2 < \epsilon. \quad (2)$$

Eşitlik 2'deki problem, doğrusal programlama ile çözülebilir. Ayrıca hesaplama karmaşıklığı daha düşük algoritmalar da bir çok uygulamada kullanılmaktadır. Eşleyen Takip (MP) [3], Dikey Eşleyen Takip (OMP) [4], Sıkıştırılmış Algılama Eşleyen Takip (CoSaMP) [5], ve Döngülü Katı/Yumuşak Eşikleme (IHT) [6] bu algoritmaların bazılarıdır. Taban matrisinde uyumsuzluk olduğunda ise [7]–[10]'da önerilen teknikler kullanılabilir.

SA'daki klasik yaklaşımda, sinyalin bilinen bir  $\Psi$  tabanında seyrek olduğu varsayılır. Bu taban  $N \times N$  boyutundadır ve ters dönüşüme izin verir. Amaç ise,  $N$ -boyutlu uzaydaki sinyali,  $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$  doğrusal ölçüm matrisiyle daha küçük olan  $M$ -boyutlu uzaya taşımaktır. [11]'deki çalışma  $\Psi$ 'nin bilindiği durumda, en uygun ölçüm matrisi  $\Phi$  üzerine yoğunlaşmıştır. Diğer çalışmalarda ise birleşik model,  $y = Ax$  kullanılmış ve  $A$ 'nın bilindiği durumlarda, seyrek sinyal  $x$ 'in geri çatılabilmesi için gerekli olan şartlar analiz edilmiştir [1], [2], [4], [12]. Bütün bu bahsedilen klasik yaklaşımda, sinyalin boyu  $N$  sabit kabul edilmiş ve seyreklik ile ölçüm sayısı birer değişken olarak düşünülmüştür.

## II. SIKIŞTIRILMIŞ ALGILAMA TEKNİKLERİNİN KULLANIMI

Pratik çoğu sistemde geri çatılmak istenen sinyalin seyrek oluşu, SA teorisi altında geliştirilen tekniklerin gerçek problemlere uygulanabilmesi olasılığını doğurmuştur. Pratik bir sistemdeki ölçüm, şu şekilde modellenebilir:

$$y(t) = \sum_{i=1}^K \alpha_i a(\theta_{H_i}; t) + n(t). \quad (3)$$

Burada  $a(\theta_{H_i}; t)$ , sinyalin  $\theta_{H_i}$  parametrelili taban fonksiyonu,  $\alpha_i$  ise o taban sinyaline karşılık gelen katsayıdır,  $n(t)$  ise ölçüm gürlütsüdür. Taban fonksiyonu  $a(\theta; t)$ , sistemin tanımını yapan parametrik bir fonksiyondur ve tek bir parametreye bağlı olabileceği gibi birden fazla parametreye de bağlı

olabilir. Örneğin, darbe-Doppler radar sisteminde bu fonksiyon şu şekilde tanımlanır:

$$a(\theta; t) = s(t - \tau) e^{-j2\pi\nu t}. \quad (4)$$

Burada  $s(t)$  vericinin gönderdiği sinyaldir,  $\theta = [\tau, \nu]$  iki boyutludur ve  $\tau$  gecikme,  $\nu$  ise Doppler kaymasına karşılık gelir. Harmonik tespiti probleminde ise taban fonksiyonun tanımı şu şekildedir:

$$a(\theta; t) = e^{-j2\pi f t}. \quad (5)$$

Burada taban fonksiyonları üstel fonksiyonlardır, tek boyutlu olan  $\theta = f$  ise frekansa karşılık gelir.

Eşitlik 3'te verilen sürekli modelin sayısal ortamda işlenebilmesi için örnekleme gerekmektedir.  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^M, [0, T]$  aralığında birörnek dağılımla rastsal bir şekilde oluşturulmuş, örnekleme zamanlarını içeren vektör olsun. Bu durumda örnekleme veri modeli şu yapıya gelir:

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^K \alpha_i a(\theta_{H_i}; \mathbf{t}) + \mathbf{n}. \quad (6)$$

Eşitlik 6'daki ölçüm vektörü  $\mathbf{y}$ , bir taban matrisi ile tanımlanmadığı için SA tekniklerinin doğrudan kullanımına uygun değildir. Taban matrisinin tanımlanabilmesi için, sürekli ve sınırlı olan parametre alanının,  $\mathcal{P}$ , ayrıklaştırılması gerekmektedir. Bu ayrıklaştırma,  $N$  tane ızgara noktası tanımlar  $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N\} \in \mathcal{P}$ . Burada her bir  $\theta_i$ , sürekli parametre alanında bir noktaya karşılık gelmektedir. Ayrıklaştırılmış her bir parametre noktası için, örnekleme zaman vektörü kullanılarak taban fonksiyonu hesaplanır:

$$\mathbf{a}_i = a(\theta_i; \mathbf{t}) \in \mathcal{C}^M. \quad (7)$$

Eşitlik 7 her bir ayrık ızgara noktası için tekrarlandığında, istenilen taban matrisi şu şekilde oluşturulur  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N] \in \mathcal{C}^{M \times N}$ .

Burada dikkat edilmesi gereken önemli nokta, ayrıklaştırma sonucunda elde edilen taban matrisinin,  $K$ -seyrek sinyalin geri çatımını, kullanılan seyrek çözücü için garantileyebilmesidir. Düşük işlem karmaşıklığı sebebiyle, seyrek çözücü olarak OMP tekniğinin kullanılacağını varsayarak,  $K$ -seyrek çözüm için gereken geri çatılabilir kriteri [12]'de belirtilmiştir:

$$\mu(\mathbf{A}) \leq \frac{1}{2K-1}. \quad (8)$$

Burada  $\mu(\mathbf{A})$ ,  $\mathbf{A}$  taban matrisinin karşılıklı uyum katsayısını ifade eder ve şu şekilde tanımlanır:

$$\mu(\mathbf{A}) = \max_{i \neq j} \frac{|\mathbf{a}_i^H \mathbf{a}_j|}{\|\mathbf{a}_i\|_2 \|\mathbf{a}_j\|_2}. \quad (9)$$

Eşitlik 9'daki tanıma göre karşılıklı uyum katsayısı, Eşitlik 3'te tanımlanmış sistemin taban fonksiyonlarına göre belirlenmelidir. Bu noktadan sonraki analizde harmonik tespiti problemi üzerine yoğunlaşılacak ve taban fonksiyonu olarak Eşitlik 5'deki yapı kullanılacaktır. Varsayalım ki iki ayrık parametre noktası arasındaki fark  $\lambda_\theta$  olsun,  $\theta_{i+1} = \theta_i + \lambda_\theta$ . Bu durumda, ardışık iki parametre noktasına karşılık gelen taban vektörlerinin iç çarpımı aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} \mu_{\lambda_\theta} &= \frac{|\mathbf{a}(\theta_i; \mathbf{t})^H \mathbf{a}(\theta_{i+1}; \mathbf{t})|}{\|\mathbf{a}(\theta_i; \mathbf{t})\|_2 \|\mathbf{a}(\theta_{i+1}; \mathbf{t})\|_2} = \frac{1}{M} \left| \sum_{i=1}^M e^{j2\pi \lambda_\theta t_i} \right| \\ &\approx |\text{sinc}(\lambda_\theta T)|. \end{aligned} \quad (10)$$

Eşitlik 10'a göre iki ayrık parametre noktası arasındaki fark artarken, o noktalara karşılık gelen taban vektörlerinin iç çarpımları da azalacaktır. Bu durumda taban matrisinin karşılıklı uyum katsayısı, ardışık parametre noktalarına karşılık gelen taban vektörlerinin iç çarpımıdır. Ayrıklaştırma çözünürlüğüyle ilgili  $|\lambda_\theta| < 1/T$  varsayılarak, taban matrisinin karşılıklı uyum katsayısı şu şekilde yazılabilir:

$$\mu(\mathbf{A}) = \text{sinc}(\lambda_\theta T). \quad (11)$$

Eşitlik 6'daki sürekli modeli ayrıklaştırılırken kullanılan çözünürlüğün sebep olduğu, Eşitlik 11'de belirtilmiş olan karşılıklı uyum katsayısının, OMP tekniği ile  $K$ -seyrek çözümü garantilemesi için Eşitlik 8'de verilen şartı sağlaması gerekmektedir. Bu durumda ayrıklaştırma çözünürlüğünün şu eşitsizliği sağlaması gerekir:

$$\mu(\mathbf{A}) = \text{sinc}(\lambda_\theta T) \leq \frac{1}{2K-1}, \quad (12)$$

veya ayrıklaştırma çözünürlüğünü, seyreklik seviyesinin bir fonksiyonu olarak düşünersek:

$$\lambda_\theta(K) = \frac{1}{T} \text{sinc}^{-1}\left(\frac{1}{2K-1}\right). \quad (13)$$

$K$	1	2	3	4	5	10	$\infty$
$\lambda_\theta T$	0	0.725	0.826	0.872	0.898	0.950	1

Tablo I: Eşitlik 13'te tanımlanan ayrıklaştırma çözünürlüğünün çeşitli seyreklik seviyesi  $K$  için sayısal değerleri.

Eşitlik 13'te tanımlanan çözünürlük, parametre uzayını ayrıklaştırırken  $K$ -seyrek çözümü garantileyen en küçük çözünürlüktür. Dolayısıyla Eşitlik 6'daki sürekli model, burada tanımlanan çözünürlük ile ayrıklaştırılmalıdır. Tablo I'de, bazı  $K$  değerlerine karşılık gelen çözünürlük değerleri verilmiştir. Buradaki ilk gözlem, çözünürlüğün  $K$ 'ya göre azalan bir değişimi olduğudur. Beklenildiği üzere, seyrekliği az bir sinyal geri çatılmak isteniyorsa, taban vektörlerinin karşılıklı etkileşimi düşük olmalıdır. Bu da taban vektörlerine karşılık gelen parametrelerin birbirinden daha uzak olması anlamına gelir. İkinci gözlem ise, çözünürlüğün her zaman  $1/T$ 'den küçük olduğudur. Bilindiği üzere,  $[0, T]$  zaman aralığında ölçüm yapan bir sistemin frekans çözünürlüğü  $1/T$ 'dir. En az seyrek durumda dahi gerekli olan çözünürlüğün  $1/T$ 'den küçük olması, bu bağlamda beklenen tutarlı bir sonuçtur. Üçüncü gözlem ise  $K = 1$  olduğu durumda gerekli olan çözünürlüğün 0 olmasıdır. Başka bir deyişle, 1-seyrek bir çözüm için istenildiği kadar yoğun bir ayrıklaştırma yapılabilir ve geri çatma performansı bu durumdan etkilenmez. 1-seyrek durumdaki bu özellik, bir sonraki kısımda bahsedilecek olan özinyeli çözüm yaklaşımının önemli bir özelliğini sağlayacaktır.

Burada dikkat edilmesi gereken önemli nokta, Eşitlik 13'ün genelgeçer bir durum olmadığıdır. Eşitlik 13, harmonik tespiti probleminde OMP tekniği kullanıldığında izin verilen en küçük çözünürlüğü vermektedir. Başka bir çözücü veya başka

bir taban fonksiyonu için izin verilen en küçük çözünürlük, Eşitlik 13'ten farklı bir yapıda olabilir. Daha soyut ve genel bir anlamda, gerekli olan ayrıklaştırma çözünürlüğü şu şekilde ifade edilebilir:

$$\lambda_\theta = f(M, K). \quad (14)$$

Burada tanımlanan  $f(\cdot, \cdot)$  fonksiyonu, taban fonksiyonları ve tercih edilen seyrek çözücüye bağlı olarak sayısal veya analitik olarak önceden hesaplanabilir.

### III. ÖZYİNELİ YAKLAŞIM

Varsayalım ki ölçüm vektörü  $\mathbf{y} \in \mathcal{C}^M$  ve seyreklik seviyesi ile ilgili öncül bir tahmin,  $K$ , verilmiş olsun. Bu durumda istenilen çözücü kavramsal olarak şu şekilde ifade edilebilir:

$$[\alpha^*, \theta^*] = \mathcal{S}(\mathbf{y}, K, \mathcal{P}). \quad (15)$$

Burada  $\theta^*$  kestirilen parametreler ve  $\alpha^*$  ise onlara karşılık gelen katsayılardır.  $\mathcal{P}$  ise çözümün arandığı sınırlı ve sürekli alandır. Eşitlik 15'teki gibi bir çözücünün SA tekniklerini kullanabilmesi için taban matrisine ihtiyacı vardır. Bunun için öncelikle Eşitlik 14 kullanılarak gerekli olan ayrıklaştırma çözünürlüğünü hesaplanır ve  $\mathcal{P}$  bu çözünürlüğe göre ayrıklaştırılır. Eşitlik 7 kullanılarak da taban matrisi  $\mathbf{A}$  oluşturulur. Bu noktada hem ölçüm vektörü  $\mathbf{y}$ , hem de taban matrisi  $\mathbf{A}$  olduğu için problem  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{n}$  şeklinde tanımlanıp, varsayılan seyrek çözücü ile ölçüm sinyalinin  $K$ -seyrek çözümü elde edilebilir. Bu çözüm sonucunda, ölçüm sinyali  $\mathbf{y}'$ 'i açıklayan, hem parametre kestirimlerini hem de onlara karşılık gelen katsayı kestirimleri elde edilir. Bu seyrek çözüm sonunda ölçüm sinyali şu şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^K \alpha_i^* a(\theta_i^*; \mathbf{t}) + \mathbf{n}. \quad (16)$$

Burada  $\mathbf{n}$  terimi hem ölçüm gürültüsünü, hem de ızgaradışılık sebebiyle oluşan hataları içerir. Bu noktada dikkat edilmesi gereken nokta, ayrıklaştırma ile oluşturulan matris-vektör ilişkisinin yaklaşık bir ilişki olduğudur. Ancak Eşitlik 14'ün yapısına göre çözünürlük,  $K$ 'ya göre azalan bir yapıda olduğu için, problem ne kadar seyrek olursa, izin verilen çözünürlük ve dolayısıyla matris-vektör ilişkisinin hassasiyeti de o kadar yüksek olur. Bu sebeple amaç, parametre alanının tamamında tanımlı olan  $K$ -seyrek problemi, daha küçük bir parametre alanında tanımlı daha seyrek problemlere parçalayıp daha hassas bir çözüm elde etmektir. Bu düşünce ile ilk adımda,  $K$ -seyrek problemi 1-seyrek ve  $K - 1$ -seyrek iki alt probleme ayırmak hedeflenir. Eşitlik 16'nın genelliği bozulmadan  $|\alpha_1^*| \leq |\alpha_2^*| \leq \dots \leq |\alpha_K^*|$  varsayılabildiği için, en güçlü olan  $K$ . hedefe karşılık gelen kısmi ölçüm vektörü şu şekilde yaklaşık olarak yazılabilir:

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{y} - \sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i^* a(\theta_i^*; \mathbf{t}). \quad (17)$$

Eşitlik 17'de hesaplanan kısmi ölçüm vektörüyle ilgili bilinen şey, karşılık gelen doğru parametrenin  $\theta_K^*$  civarında olacaktır. Dolayısıyla kısmi ölçümün çözümü için kullanılacak sınırlı ve sürekli alan şu şekilde tanımlanır:

$$\mathcal{P}_0 = \mathcal{B}_r(\theta_K^*) \subset \mathcal{P}. \quad (18)$$

Burada  $\mathcal{B}_r(\theta_K^*)$ ,  $\theta_K^*$  merkezli ve  $r$  yarıçaplı bir komşuluk ifade etmektedir. Eğer yarıçap  $r < |\lambda_\theta|$  seçilirse, tanımlanan komşuluğun içinde sadece  $K$ . hedef bulunur ve 1-seyrek çözüm aranır. Bu noktada yine bir ölçüm vektörü  $\mathbf{y}_0$ , ona karşılık gelen bir seyreklik kestirimi ve çözümün aranacağı alan vardır. O zaman Eşitlik 15'te tanımlanan çözücü kullanılarak  $K$ . hedef için daha iyi bir kestirim elde edilebilir:

$$[\alpha_K^*, \theta_K^*] = \mathcal{S}(\mathbf{y}_0, 1, \mathcal{P}_0). \quad (19)$$

Eşitlik 19'da elde edilen  $K$ . hedef için olan parametre kestirimleri, Eşitlik 15'te elde edilen kestirimlerden daha hassastır. Bu sayede  $K$ . hedefe karşılık gelen kısmi ölçüm vektörünü daha hassas bir şekilde oluşturup, diğer hedef noktaları için de kestirimlerin hassasiyeti artırılabilir. Bu amaçla  $K$ . hedef dışındaki hedeflere karşılık gelen kısmi ölçüm vektörü şu şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{y}'_0 = \mathbf{y} - \alpha_K^* a(\theta_K^*; \mathbf{t}). \quad (20)$$

Ayrıca bu hedeflerin aranacağı sürekli parametre uzayı da şu şekilde tanımlanır:

$$\mathcal{P}'_0 = \mathcal{P} - \mathcal{P}_0. \quad (21)$$

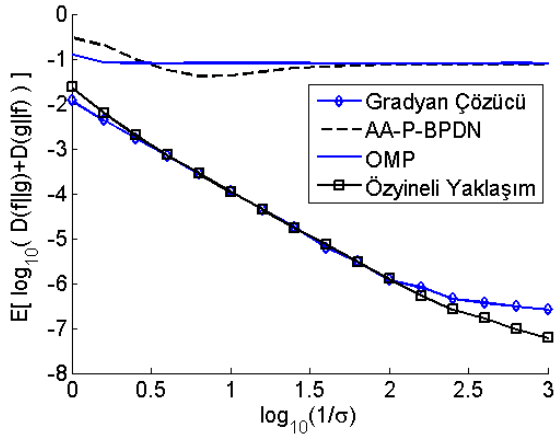
Eşitlik 20'de hesaplanan kısmi ölçüm vektörüyle ilgili bilinen şey, karşılık gelen çözümün  $K - 1$ -seyrek olacaktır. Bu noktada yine bir ölçüm vektörü  $\mathbf{y}'_0$ , ona karşılık bir seyreklik kestirimi ve çözümün aranacağı bir parametre alanı vardır. O zaman Eşitlik 15'te tanımlanan çözücü kullanılarak ilk  $K - 1$  hedef için daha iyi bir kestirim elde edilebilir:

$$[\alpha_1^*, \dots, \alpha_{K-1}^*, \theta_1^*, \dots, \theta_{K-1}^*] = \mathcal{S}(\mathbf{y}'_0, K - 1, \mathcal{P}'_0). \quad (22)$$

Bu yaklaşımda farkedilmesi gereken önemli nokta, Eşitlik 15'te verilen büyük bir parametre uzayında az seyrekliğe sahip olan bir problemin, Eşitlik 19 ve 22'de verilen daha küçük bir parametre uzayında daha seyrek olan iki alt probleme nasıl dönüştürüldüğüdür. Bu problem küçültme yaklaşımında dikkat edilmesi gereken 3 önemli gözlem vardır. Bu gözlemlerden ilki, bu yaklaşımın tamamen özyineli bir yapıya sahip olduğudur. Eşitlik 15, 19 ve 22'de tanımlanan problemler birbirlerinin yapısal olarak tamamen aynıdır. Ana problem, alt problemlerde kendini tekrarlamıştır. Sadece çözücü farklı parametreler ile çağrılmıştır. İkinci gözlem ise Eşitlik 19'daki problemin, özyineli yapının temel durumu olmasıdır. 1-seyrek durum, bu problemin inebileceği en alt seviyedir. 1-seyrek problem çözümünün en önemli özelliği ise Eşitlik 14'ün yapısı gereği istenilen her çözünürlüğe izin vermesidir. Üçüncü gözlem ise Eşitlik 22'deki problemin hala temel duruma ulaşmamış olmasıdır. Eşitlik 22'nin çözümü sırasında problem, özyineli olarak 1-seyrek ve  $K - 2$ -seyrek yapıya sahip iki alt probleme bölünür. Bu şekilde ana problem, 1-seyrek yapıya sahip alt problemlere parçalanıncaya kadar kendini yineler.

Eşitlik 18'de tanımlanan komşuluğun yarıçapının  $r \geq |\lambda_\theta|$  seçildiği durumda, komşuluğun içine  $K$ . hedef dışında başka hedefler de düşebilir. Bu durumda komşuluğa  $K_0 \geq 1$  tane hedef düştüğü varsayılırsa, Eşitlik 15'teki problem  $K_0$  ve  $K - K_0$  seyrekliğe sahip iki alt probleme parçalanmış olur. Komşuluğun yarıçapı özyineli yapıyı etkileyeceği için, nasıl seçilmesi gerektiği önemli bir husustur.

Bu özyineli yaklaşımın sağladığı önemli bir diğer avantaj ise, Eşitlik 19 ve 22'deki problemlerin, çözümlerdeki değişim



Şekil 1: Parametre alanından birörnek bir dağılım oluşturacak şekilde seçilen 5-seyrek sinyallerin geri çatım başarımı.

durağanlaşmıca kadar ardışık olarak tekrar edilebilmesidir. Bu problemlerin ilk defa çözülüşünde, tüm hedeflerdeki kestirim hassasiyeti artmış ve iki alt problem birbirinden biraz daha ayrılmış olur. Ancak çözümlerin her tekrarlanışında alt problemlerin birbirine girişimi azalır ve kestirimlerin hassasiyeti artar. Bu da sunulan yaklaşımın aynı zamanda döngüsel bir yapı ile çözümlerin hassasiyetini arttırabileceğini gösterir.

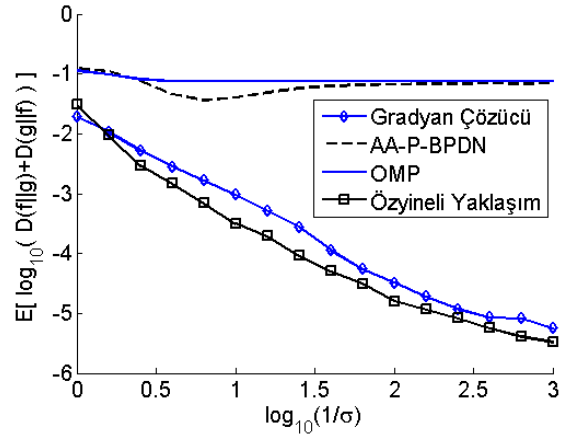
#### IV. BENZETİMLER

Bu kısımda, önerilen tekniğin başarımı harmonik elde etme problemi üzerinde denenmiş ve Eşitlik 5'teki taban fonksiyonları kullanılmıştır. Parametre uzayı olarak 100 – 300Hz aralığı kullanılmıştır,  $\mathcal{P} = [100, 300]$ .  $t \in [0, 1]$  olacak şekilde,  $M = 100$  rastsal örnek alınmıştır. Doğru hedef parametreleri,  $K = 5$  seyreklik seviyesinde, verilen parametre alanından birörnek dağılım oluşturacak şekilde seçilmiştir. Hedeflerin katsayıları  $\alpha_i$ 'ler ise karmaşık alandaki birim çember üzerinden birörnek dağılım oluşturacak şekilde seçilmiştir. Ölçüm vektörü Eşitlik 6'daki modele göre oluşturulup,  $\mathbf{n} = \sigma\mathbf{w}$  ve  $w_i \sim N(0, 1)$  olacak şekilde beyaz ölçüm gürültüsü eklenmiştir. Özyineli yaklaşımda seyrek çözücü olarak OMP kullanılmış ve Eşitlik 18'deki komşuluğun yarıçapı  $r = 0.5\text{Hz}$  olarak seçilmiştir.

Önerilen özyineli yaklaşımın başarımı, [8]'de önerilen gradyan çözücü, [10]'da önerilen AA-P-BPDN tekniği ve standart OMP tekniği ile karşılaştırılmıştır. Hata ölçüvü olarak da yine [8]'de önerilen Kullback-Leibler İraksallığı (KLD) tabanlı metrik kullanılmıştır. Şekil 1'de parametrelerin rastgele 5-seyrek olduğu durumdaki geri çatım performansı verilmiştir. Önerilen özyineli yaklaşım, gradyan çözücü ile benzer bir performansa sahiptir, ancak düşük gürültü seviyelerinde gradyan çözücünden daha iyidir. Şekil 2'de ise 5-seyrek durumda, 2 hedefin birbirine ızgara çözünürlüğünden daha yakın olduğu durum incelenmiştir. Görüldüğü üzere, hem gradyan çözücünün hem de özyineli yaklaşımın performansı bir önceki duruma göre daha kötüdür. Ancak önerilen özyineli yaklaşım, gradyan çözücünden daha başarılıdır. AA-P-BPDN ve standart OMP teknikleri ise her iki durumda son derece düşük bir başarıma sahiptirler.

#### V. SONUÇLAR

Pratik sistemlerdeki ölçüm sinyallerinin sürekli bir parametre alanında seyrek bir ifadesi olmasına karşın, SA



Şekil 2: İki hedefin çözünürlük limitinin altında yakın olduğu durumda 5-seyrek sinyallerin ortalama geri çatım başarımı.

kuramı altında geliştirilen tekniklerin uygulanabilmesi için sürekli parametre alanının ayrıklaştırılması gerekmektedir. Bu ayrıklaştırma ise ızgara-dışılık problemi yaratıp geri çatım başarımını düşürmektedir. Bu bildiride ise parametre alanını değişken ve uyarlamalı bir şekilde ayrıklaştıran özyineli bir yaklaşım sunulmuştur. Bu yaklaşım herhangi bir seyrek çözücü kullanarak, döngüsel ve özyineli olarak ana problemi basit alt problemlere parçalamakta ve her alt problem için daha hassas kestirimler elde etmektedir. Benzetim sonuçlarında ise birbirine çok yakın hedeflerin olduğu kötü konumlanmış problemlerde dahi önerilen yaklaşımın başarılı sonuçlar ürettiği gözlemlenmiştir.

#### KAYNAKÇA

- [1] D. Donoho, "Compressed sensing," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306, 2006.
- [2] E. Candes, J. Romberg, and T. Tao, "Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 52, pp. 489–509, 2006.
- [3] S. Mallat and Z. Zhang, "Matching pursuits with time-frequency dictionaries," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 41, pp. 3397–3415, 1993.
- [4] J. Tropp and A. Gilbert, "Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 53, no. 12, pp. 4655–4666, Dec. 2007.
- [5] D. Needell and J. A. Tropp, "Cosamp: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples," *Appl. Comp. Harmonic Anal.*, vol. 26, issue 3, pp. 301–321, May 2009.
- [6] T. Blumensath and M. E. Davies, "Iterative hard thresholding for compressed sensing," *Appl. Comp. Harmonic Anal.*, Vol. 27, Issue 3, pp. 265–274, Nov. 2009.
- [7] O. Teke, A. C. Gurbuz and O. Arikan "Perturbed orthogonal matching pursuit," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 61, pp. 6220–6231, 2013.
- [8] O. Teke, A. C. Gurbuz and O. Arikan, "A robust compressive sensing based technique for reconstruction of sparse radar scenes", *Digital Signal Processing*, vol. 27, pp 23-32, April 2014.
- [9] H. Zhu, G. Leus and G. B. Giannakis "Sparsity-Cognizant Total Least-Squares for Perturbed Compressive Sampling," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 59, no. 5, pp. 2002–2016, May. 2011.
- [10] Z. Yang, C. Zhang, L. Xie, "Robustly Stable Signal Recovery in Compressed Sensing With Structured Matrix Perturbation" *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 60, no. 9, pp. 4658–4671, 2012.
- [11] M. Elad, "Optimized Projections for Compressed Sensing," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 55, no. 12, pp. 5695–5702, 1993.
- [12] J. Tropp, "Greed is Good: Algorithmic Results for Sparse Approximation," *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 50, no. 10, pp. 2231–2242, Oct. 2004.