

Optik Sinyaller ve Sistemlerde Doğrusal Kanonik Dönüşümler, Serbestlik Derecesi, ve Örnekleme

Linear Canonical Transforms, Degrees of Freedom, and Sampling in Optical Signals and Systems

Haldun M. Özaktaş

Elektrik Mühendisliği Bölümü

Bilkent Üniversitesi, 06800 Bilkent, Ankara

haldun@ee.bilkent.edu.tr

Figen S. Öktem

Department of Electrical and Computer Engineering

University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois 61801

oktem1@illinois.edu

Özetçe —Optik sistemlerin ve sinyallerin serbestlik derecesini uzam-sıklık düzleminde (faz uzayında) inceliyoruz. Doğrusal kanonik dönüşümlerin uzam-sıklık uzayı ile olan ilişkisi bu çalışmanın özünü oluşturmaktadır. Bu ilişkiye dayanarak, çok sayıda açıklığı bulunan birinci dereceden optik sistemlerin serbestlik derecesini nasıl nicelleştirebileceğimizi tartışacağız, ve kayıpsız geçiş için gereken koşulları ortaya koyacağız. Dahası, sinyallerin serbestlik derecesinin uzam-sıklık dayanakları ile ilişkisini inceleyip, herhangi bir uzam-sıklık dayanağı olan bir sinyal için Nyquist-altı örnekleme yaklaşımını getireceğiz. Bu sonuçları optik sistemlerin benzetimine uygulayacağız.

Anahtar Kelimeler—optik sinyal işleme, serbestlik derecesi, Nyquist örnekleme hızı, zaman-sıklık analizi, uzam-sıklık analizi, doğrusal kanonik dönüşümler, kesirli Fourier dönüşümü

Abstract—We study the degrees of freedom of optical systems and signals based on space-frequency (phase-space) analysis. At the heart of this study is the relationship of the linear canonical transform domains to the space-frequency plane. Based on this relationship, we discuss how to explicitly quantify the degrees of freedom of first-order optical systems with multiple apertures, and give conditions for lossless transfer. Moreover, we focus on the degrees of freedom of signals in relation to the space-frequency support and provide a sub-Nyquist sampling approach to represent signals with arbitrary space-frequency support. Implications for simulating optical systems are also discussed.

Keywords—optical signal processing, degrees of freedom, Nyquist sampling rate, time-frequency analysis, linear canonical transformations, fractional Fourier transform

I. GİRİŞ

Hiçbir kısıtlama olmaksızın birbirinden rastgele mesafelerle ayrılmış rastgele sayıdaki ince merceklerden oluşan optik sistemlere birinci dereceden optik sistemler diyoruz. Matematiksel olarak bu sistemler doğrusal kanonik dönüşümler (DKD) şeklinde modellenilebiliyor [1]–[14]. Bu tür bir sistemin çıktısı $f_M(u)$, girdisi $f(u)$ fonksiyonuna, $B \neq 0$ için şu

şekilde bağlıdır [1], [2]:

$$f_M(u) \equiv (C_M f)(u) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} C_M(u, u') f(u') du', \quad (1)$$

$$C_M(u, u') \equiv \sqrt{\frac{1}{B}} e^{-i\pi/4} e^{i\pi\left(\frac{D}{B}u^2 - 2\frac{1}{B}uu' + \frac{A}{B}u'^2\right)}. \quad (2)$$

Burda C_M , $M = [A \ B; \ C \ D]$ matrisine sahip üniter DKD operatörüdür ($AD - BC = 1$). Arka arkaya birkaç optik sistemin birleştirilmesi durumunda, bu sistemlere ait M matrisleri çarpılarak, birleşik sistemin matrisi elde edilir. DKD ailesi, Fourier ve kesirli Fourier dönüşümlerini, koordinat ölçeklenmesi gibi özel halleri içinde barındırır.

$f(u)$ fonksiyonunun a ıncı kesirli Fourier dönüşümü (KFD) $f_a(u)$ olarak gösterilir ve çoklukla şu şekilde tanımlanır [1]:

$$f_a(u) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K_a(u, u') f(u') du', \quad (3)$$

$$K_a(u, u') \equiv A_\phi e^{i\pi(\cot \phi u^2 - 2 \csc \phi uu' + \cot \phi u'^2)}, \quad (4)$$

$$A_\phi = \sqrt{1 - i \cot \phi}, \quad \phi = a\pi/2. \quad (5)$$

Bu tanım $a \neq 2j$ için geçerlidir. Dönüşüm, $a = 4j$ olduğunda $K_a(u, u') = \delta(u - u')$ ve $a = 4j \pm 2$ olduğunda $K_a(u, u') = \delta(u + u')$ olarak tanımlanır.

Doğrusal kanonik dönüşümler, kesirli Fourier dönüşümleri, ve bunların optik ve sinyal işlemeye uygulamaları hakkında daha fazla bilgi için [1], [15]–[28] numaralı referanslara bakınız.

Optikte serbestlik derecesi ve uzam-sıklık analizinin uygulanması ile ilgili daha fazla bilgi ve referanslar için [29]–[44] numaralı referanslara bakınız.

II. DOĞRUSAL KANONİK DÖNÜŞÜMLERİN UZAM-SIKLIK DÜZLEMİNDE EĞİK EKSENLERE EŞDEĞERLİĞİ

a ıncı dereceden kesirli Fourier dönüşümü tanım bölgelerinin, uzam-sıklık düzleminde eğik açılı eksenlere karşı

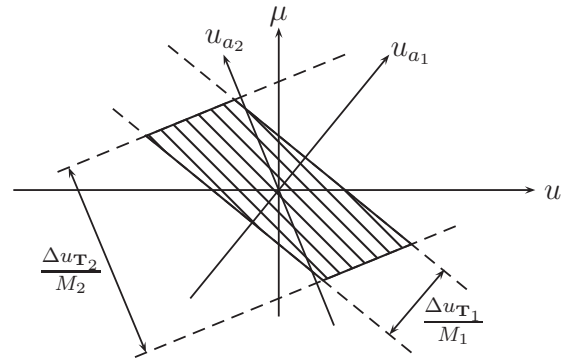
geldiği bilinmektedir [1], [45]. Yakın zamanda, DKD tanım bölgelerinin, ölçeklendirilmiş KFD tanım bölgelerine eşdeğer olduğu, dolayısıyla da eğik açılı eksenlere karşı geldiği gösterilmiştir [46]. DKF ve KFD tanım bölgeleri arasındaki bu eşdeğerlik, DKD'leri ölçeklendirilmiş ve ötümlü çarpılmış bir KFD olarak yazabilmemizin bir sonucudur. Çarpma işlemi bir sinyalin tanım bölgesini değiştiren bir işlem olarak görülmez, ve ölçeklendirme de bir tanım bölgesini görece önemsiz bir şekilde değiştirir. Dolayısıyla, DKD'lerin gerçek anlamda tanım bölgesi değişimine karşı gelen kısmı, içlerinde barındırdıkları KFD'dür. Doğrusal kanonik dönüşüme uğramış sinyaller esas itibarıyla ölçeklendirilmiş KFD tanım bölgesinde yaşarlar, ki bu da uzam-sıklık düzleminde eğik açı yapan eksenlere karşı gelir.

DKD'lerin, KFD'leri ile bu çoktan-bire ilişkisine dayanarak, DKD tanım bölgelerini kesirli Fourier dönüşümü parametresi ile etiketleyebilir ve monotonik olarak sıralayabiliriz. Oysa genel olarak, DKD'lerin sahip olduğu üç parametre nedeniyle doğal bir sıralaması yapılamayacağı düşünülmüştür. Bu sonuç, DKD'ler tarafından modellenmiş optik sistemler için önemli sonuçlar ifade eder. Bir optik sistemde herhangi bir düzlemdeki optik alan, sistemin girişindeki optik alanın DKD'si olarak ifade edilebilir. Optik eksen üzerindeki her noktayı, monotonik artan tek bir parametre ile ilişkilendirebilmek, ışığın optik sistemler içindeki evrimini çok daha saydam bir şekilde anlamamıza imkan tanır. Oysa öbür türlü, ışığın üç parametrelili ve nasıl sıralanacağı belli olmayan tanım bölgelerinden geçtiğini düşünmek çok daha kafa karıştırıcı ve yorum yapması zor bir bakış açıdır. Burada sunduğumuz bakış açısı optik sistemlerin DKD olarak modellenmesi ile KFD olarak modellenmesi arasında bir köprü de kurmaktadır.

III. UZAM-SIKLIK BANT ÇARPIMININ BİR GENELLEMESİ OLARAK ÇİFT KANONİK BANT ÇARPIMI

Eğer bir sinyal seti herhangi iki DKD tanım bölgesinde sonlu aralıklara sınırlı ise, uzam-sıklık dayanağı da bir paralelkenar şeklinde olacaktır (Şekil 1). Bu sinyal setinin serbestlik derecesi, bu paralelkenarın alanı tarafından verilir, ki bu da daha aşağıda tanımlayacağımız çift kanonik bant çarpımına eşittir, fakat geleneksel uzam-sıklık bant çarpımından küçüktür.

Geleneksel uzam-sıklık bant çarpımı, enerjileri belli uzam ve sıklık aralıklarına sınırlanmış bütün sinyaller içinde istediğimiz sinyali belirtmek için ihtiyaç duyduğumuz en az sayıda örnek sayısına eşittir. Yaklaşık olarak uzam ve sıklık bantlarıyla sınırlı bir sinyali belirtmek için ihtiyaç duyduğumuz en az sayıda örnek, aynı zamanda sinyal setinin serbestlik derecesine karşı gelir. Daha genel olarak, serbestlik derecesi, şekilden bağımsız olarak uzam-sıklık dayanağının alanına eşittir [41]. Uzam-sıklık dayanağı eksenlere dik bir dikdörtgen şeklinde değilse, gerçek serbestlik derecesi, uzam-sıklık bant çarpımından daha küçük olacaktır. Öyleyse, eğer iki ayrı DKD tanım kümesine sınırlı bir sinyal kümesi ile ilgileniyorsak, çift kanonik bant çarpımı, sinyal setinin serbestlik derecesinin daha iyi bir ölçüsü olacaktır. Bu bize sinyalleri daha az sayıda örnek ile temsil etme ve işleme imkanı sunar.



Şekil 1: İki DKD tanım bölgesinde sonlu dayanaklar tanımlandığı durumdaki uzam-sıklık (faz uzayı) dayanağı. Paralelkenarın alanı $\Delta u_{M_1} \Delta u_{M_2} |\beta_{1,2}|$ ifadesine eşittir. Burda Δu_{M_1} ve Δu_{M_2} sinyalin DKD tanım bölgelerindeki uzamlarıdır, M_1 ve M_2 bağlantılı ölçekler, ve $\beta_{1,2}$ bu iki tanım kümesi arasındaki parametredir [46].

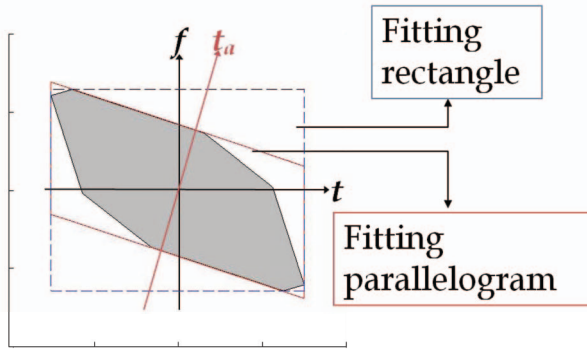
IV. SERBESTLİK DERECESESİ VE VERİMLİ SİNYAL TEMSİLİ

Shannon-Nyquist yaklaşımının, rasgele şekle sahip bir uzam-sıklık dayanağına uygulanması, o şeklin eksenlere dik bir dikdörtgen içine alınmasına karşılık gelir. Örnek sayısı, dikdörtgenin alanı tarafından verilir ve uzam-sıklık bant çarpımına eşittir. Bu sayı, gerçek uzam-sıklık dayanağının alanından ve sinyalin gerçek serbestlik derecesinden oldukça büyük olabilir. Öyleyse, sinyallerin eksenlere dik, dikdörtgen uzam-sıklık dayanağına sahip olmadığı durumlarda, uzam-sıklık bant çarpımı sinyallerin gerçek serbestlik derecesini olduğundan büyük gösterir. Oysa bu sinyalleri daha az sayıda örnek ile temsil etmek mümkündür. Çoklukla, gerçek uzam-sıklık dayanağını, bir dikdörtgendense, bir paralelkenarın içine almak daha verimlidir. Bu durumda, çift kanonik bant çarpımı, sinyalin gerçek serbestlik derecesini daha iyi temsil eder, ve böylece biz de sinyali Shannon-Nyquist örnekleme teoreminin öngördüğünden daha az örnekle temsil edebiliriz. Bu yaklaşım, basit bir geometrik probleme indirgenebilir, öyle ki amacımız verilmiş bir uzam-sıklık dayanağını içine alan en küçük paralelkenarı bulmaktır (örnek olarak bakınız Şekil 2). Paralelkenarın alanı bize ihtiyacımız olan örnek sayısını verir ve sinyali geri kazanmak için DKD aradeğerleme formülünü kullanabiliriz [47], [48]:

$$f(u) = \delta u |\csc \phi| \Delta u_M e^{-i\pi \cot \phi u^2} \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n \delta u) \text{sinc}(\csc \phi \Delta u_M (u - n \delta u)) e^{i\pi \cot \phi (n \delta u)^2}. \quad (6)$$

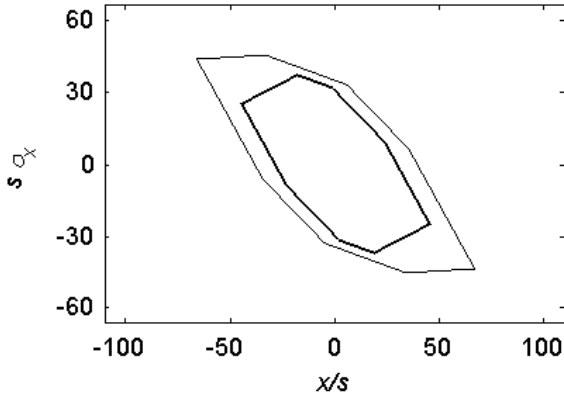
V. OPTİK SİSTEMLERİN SERBESTLİK DERECESESİ VE SİMÜLASYONU

Önceki bölümde verilen kavramları kullanarak, herhangi sayıda mercekle ve açıklıktan oluşan optik sistemlerin uzam-sıklık (faz uzayı) penceresini bulabiliriz [50]. Eğer sisteme giren sinyallerin uzam-sıklık dayanağı tamamiyle bu pencerenin içinde kalıyorsa, sinyal bilgi kaybına uğramadan sistemden geçecektir (Şekil 3). Böyle olmadığında ise,



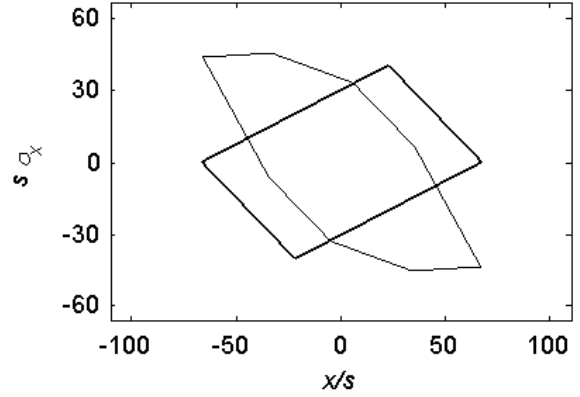
Şekil 2: En küçük içine-alan paralelkenar (düz çizgi) ve içine-alan dikdörtgen (kesik çizgi) gösterilmiştir. Her iki durumda da sinyalin uzam tanım bölgesinin t 'de örneklendiği varsayılmıştır. Gri renkli bölge, uzam-sıklık dayanağıdır [10], [49].

pencerenin içinde kalan kısımlar geçecek, dışında kalan kısımlar engellenecektir (Şekil 4). Bu sonuç, pratikte karşılaşılabilecek sistemlerin çoğu için, oldukça iyi bir yaklaşımla doğrudur. Ayrıca, sistemden geçebilecek en büyük serbestlik derecesi, pencerenin alanına eşittir. Bu sonuçlara sahip olduğumuzda, çok sayıda açıklığı bulunan optik sistemlerin davranışı ve tasarımında oldukça içgörü sahibi olabiliriz. Bu sonuçlar, bilgi kaybını en aza indiren sistemler tasarlamamıza yardımcı olur. Bu yaklaşımın bir avantajı, analiz ve tasarım aşamalarında, sinyallerle ilgili varsayımlar gerektirmemesidir, çünkü sistem penceresi kavramı, sisteme girecek sinyallerden bağımsızdır.



Şekil 3: Sinyal dayanağı tamamen sistem penceresi içinde yer aldığı için bilgi kaybı yoktur [50].

Fiziksel sistemlerin sadece sonlu sayıda serbestlik derecesini taşıyabilmeleri, sinyaller üstündeki etkilerin ayrık sistemlerle benzetimine olanak tanır. Yakın zaman önce yapılan çalışmalar [51], [52] göstermiştir ki eğer örnek sayısı N , muhattap olduğumuz sinyallerin çift kanonik bant çarpımına eşit veya daha büyük seçilirse, ayrık DKD (ADKD) kullanarak sürekli DKD'e oldukça iyi bir şekilde yaklaşılabılır. Burdaki tek sınırlama, hiçbir sinyalin birden fazla tanım bölgesinde



Şekil 4: Sinyalin sistem penceresi içinde kalan kısımları geçecek, dışında kalan kısımları engellenecektir [50].

sonlu bir aralığa *tamamen* sınırlı olamayışını öngören temel matematiksel özelliktir. Ayrık ve sürekli DKD'ler arasındaki kesin ilişki söz konusu yaklaşımın kalitesini gösterir ve N arttıkça nasıl iyileştiğini ortaya koyar. Bu sonucun grafik gösterimi [53] tarafından verilmiştir.

Şimdi, optik sistemlerin benzetimini nasıl yapacağımızdan söz edelim. Diyelim ki giren sinyalin uzam-sıklık dayanağını biliyoruz. Gereken örnek sayısı bu dayanağın etrafına bir paralelkenar yerleştirerek bulunabilir. Paralelkenarın karşılıklı kenarları giriş tanım kümesi olan t eksenine dik olmalı, diğer iki kenarı da çıkış DKD tanım kümesine dik olmalıdır. Bulabildiğimiz en küçük alanlı paralelkenarın alanı, bize ihtiyaç duyulan örnek sayısını verir. Bu örnek sayısı ile çıkıştaki sinyalin örneklerini, girişteki sinyalin örneklerinin DKD'ünü olarak bulabiliriz.

TEŞEKKÜR

Haldun Özaktaş'ın çalışmaları Türkiye Bilimler Akademisi tarafından kısmen desteklenmiştir.

KAYNAKÇA

- [1] H. M. Ozaktaş, Z. Zalevsky, M. A. Kutay, *The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing* (New York: Wiley, 2001).
- [2] K. B. Wolf, *Integral Transforms in Science and Engineering* (New York: Plenum Press, 1979).
- [3] J. J. Healy, M. A. Kutay, H. M. Ozaktaş, J. T. Sheridan. *Linear Canonical Transforms: Theory and Applications* (New York: Springer, baskıda, 2014).
- [4] A. Stern, "Sampling of linear canonical transformed signals," *Signal Processing*, **86**, 1421–1425 (2006).
- [5] H. M. Ozaktaş, A. Koç, İ. Sarı, M. A. Kutay, "Efficient computation of quadratic-phase integrals in optics," *Optics Letters*, **31**, 35–37 (2006).
- [6] A. Koc, H. M. Ozaktaş, C. Candan, M. A. Kutay, "Digital computation of linear canonical transforms," *IEEE Transactions on Signal Processing*, **56**, 2383–2394 (2008).
- [7] A. Koç, H. M. Ozaktaş, L. Hesselink, "Fast and accurate computation of two-dimensional non-separable quadratic-phase integrals," *Journal of the Optical Society of America A*, **27**, 1288–1302 (2010).
- [8] A. Koç, H. M. Ozaktaş, L. Hesselink, "Fast and accurate algorithm for the computation of complex linear canonical transforms," *Journal of the Optical Society of America A*, **27**, 1896–1908 (2010).

- [9] F. S. Oktem, Signal representation and recovery under partial information, redundancy, and generalized finite extent constraints, Yüksek Lisans Tezi (Bilkent Üniversitesi, Ankara, 2009).
- [10] F. S. Oktem, and H. M. Ozaktas, "Degrees of freedom of optical systems and signals with applications to sampling and system simulation," *OSA Imaging Systems and Applications 2013* (Washington DC: Optical Society of America, 2013). OSA Imaging and Applied Optics: Imaging Systems and Applications, 23–27 Haziran 2013, Arlington, Virginia'da sunulmuş davetli konuşma.
- [11] S.-C. Pei, J.-J. Ding, "Closed-form discrete fractional and affine Fourier transforms," *IEEE Transactions on Signal Processing* **48**, 1338–1353 (2000).
- [12] J. J. Healy, J. T. Sheridan, "Cases where the linear canonical transform of a signal has compact support or is band-limited," *Optics Letters*, **33**, 228–230 (2008).
- [13] B. M. Hennelly, J. T. Sheridan, "Fast numerical algorithm for the linear canonical transform," *Journal of the Optical Society of America A*, **22**, 928–937 (2005).
- [14] A. Stern, "Uncertainty principles in linear canonical transform domains and some of their implications in optics," *Journal of the Optical Society of America A*, **25**, 647–652 (2008).
- [15] H. M. Ozaktas, M. A. Kutay, Ç. Candan, "Fractional Fourier transform," A. D. Poularikas, editör, *Transforms and Applications Handbook*, üçüncü baskı (Boca Raton, Florida: CRC Press, 2010). Sayfa 14-1–14-28 (bölüm 14).
- [16] H. M. Ozaktas, B. Barshan, D. Mendlovic, L. Onural, "Convolution, filtering, and multiplexing in fractional Fourier domains and their relation to chirp and wavelet transforms," *Journal of the Optical Society of America A*, **11**, 547–559 (1994).
- [17] H. M. Ozaktas, Nilgün Erkaya, M. A. Kutay, "Effect of fractional Fourier transformation on time-frequency distributions belonging to the Cohen class," *IEEE Signal Processing Letters*, **3**, 40–41 (1996).
- [18] M. F. Erden, H. M. Ozaktas, D. Mendlovic, "Propagation of mutual intensity expressed in terms of the fractional Fourier transform," *Journal of the Optical Society of America A*, **13**, 1068–1071 (1996).
- [19] H. M. Ozaktas, "Repeated fractional Fourier domain filtering is equivalent to repeated time and frequency domain filtering," *Signal Processing*, **54**, 81–84 (1996).
- [20] B. Barshan, M. A. Kutay, H. M. Ozaktas. "Optimal filtering with linear canonical transformations," *Optics Communications*, **135**, 32–36 (1997).
- [21] M. F. Erden, H. M. Ozaktas, "Synthesis of general linear systems with repeated filtering in consecutive fractional Fourier domains," *Journal of the Optical Society of America A*, **15**, 1647–1657 (1998).
- [22] M. A. Kutay, H. Özaktas, H. M. Ozaktas, O. Arıkan, "The fractional Fourier domain decomposition," *Signal Processing*, **77**, 105–109 (1999).
- [23] İ. Ş. Yetik, H. M. Ozaktas, B. Barshan, L. Onural, "Perspective projections in the space-frequency plane and fractional Fourier transforms," *Journal of the Optical Society of America A*, **17**, 2382–2390 (2000).
- [24] İ. Ş. Yetik, M. A. Kutay, H. M. Ozaktas, "Image representation and compression with the fractional Fourier transform," *Optics Communications*, **197**, 275–278 (2001).
- [25] U. Sümbül, H. M. Ozaktas, "Fractional free space, fractional lenses, and fractional imaging systems," *Journal of the Optical Society of America A*, **20**, 2033–2040 (2003).
- [26] B. M. Hennelly, J. T. Sheridan, "Generalizing, optimizing, and inventing numerical algorithms for the fractional Fourier, Fresnel, and linear canonical transforms," *Journal of the Optical Society of America A*, **22**, 917–927 (2005).
- [27] H. M. Ozaktas, S. Ö. Arık, T. Coşkun, "Fundamental structure of Fresnel diffraction: natural sampling grid and the fractional Fourier transform," *Optics Letters*, **36**, 2524–2526 (2011).
- [28] H. M. Ozaktas, S. Ö. Arık, T. Coşkun, "Fundamental structure of Fresnel diffraction: longitudinal uniformity with respect to fractional Fourier order," *Optics Letters*, **37**, 103–105 (2012).
- [29] D. Gabor, "Light and information," E. Wolf, editör, *Progress in Optics I* (Amsterdam: Elsevier, 1961). Sayfa 109–153 (bölüm 4).
- [30] G. Toraldo di Francia, "Degrees of freedom of an image," *Journal of the Optical Society of America A*, **59**, 799–804 (1969).
- [31] F. Gori, G. Guattari, "Shannon number and degrees of freedom of an image," *Optics Communications*, **7**, 163–165 (1973).
- [32] M. J. Bastiaans, "The Wigner distribution function applied to optical signals and systems," *Optics Communications*, **25**, 26–30 (1978).
- [33] M. J. Bastiaans, "Wigner distribution function and its application to first-order optics," *Journal of the Optical Society of America A*, **69**, 1710–1716 (1979).
- [34] M. Nazarathy, J. Shamir, "First-order optics—a canonical operator representation: lossless systems," *Journal of the Optical Society of America A*, **72**, 356–364 (1982).
- [35] H. M. Ozaktas, K.-H. Brenner, A. W. Lohmann, "Interpretation of the space-bandwidth product as the entropy of distinct connection patterns in multifacet optical interconnection architectures," *Journal of the Optical Society of America A*, **10**, 418–422 (1993).
- [36] H. M. Ozaktas, Hakan Urey, "Space-bandwidth product of conventional Fourier transforming systems," *Optics Communications*, **104**, 29–31 (1993).
- [37] M. A. Kutay, M. F. Erden, H. M. Ozaktas, O. Arıkan, Ö. Güleriyüz, Ç. Candan, "Space-bandwidth-efficient realizations of linear systems," *Optics Letters*, **23**, 1069–1071 (1998).
- [38] A. Özçelikkale, H. M. Ozaktas, "Representation of optical fields using finite numbers of bits," *Optics Letters*, **37**, 2193–2195 (2012).
- [39] A. Özçelikkale, H. M. Ozaktas, "Beyond Nyquist sampling: a cost-based approach," *Journal of the Optical Society of America A*, **30**, 645–655 (2013).
- [40] A. Özçelikkale, H. M. Ozaktas, "Optimal representation of non-stationary random fields with finite numbers of samples: A linear MMSE framework," *Digital Signal Processing*, **23**, 1602–1609 (2013).
- [41] A. W. Lohmann, R. G. Dorsch, D. Mendlovic, Z. Zalevsky, C. Ferreira, "Space-bandwidth product of optical signals and systems," *Journal of the Optical Society of America A*, **13**, 470–473 (1996).
- [42] D. Mendlovic, A. Lohmann, "Space-bandwidth product adaptation and its application to superresolution: fundamentals," *Journal of the Optical Society of America A*, **14**, 558–562 (1997).
- [43] D. Mendlovic, A. Lohmann, Z. Zalevsky, "Space-bandwidth product adaptation and its application to superresolution: examples," *Journal of the Optical Society of America A*, **14**, 563–567 (1997).
- [44] Z. Zalevsky, D. Mendlovic, A. Lohmann, "Understanding superresolution in Wigner space," *Journal of the Optical Society of America A*, **17**, 2422–2430 (2000).
- [45] H. M. Ozaktas, O. Aytur, "Fractional Fourier domains," *Signal Processing*, **46**, 119–124 (1995).
- [46] F. S. Oktem, H. M. Ozaktas, "Equivalence of linear canonical transform domains to fractional Fourier domains and the bicanonical width product: a generalization of the space-bandwidth product," *Journal of the Optical Society of America A*, **27**, 1885–1895 (2010).
- [47] X.-G. Xia, "On bandlimited signals with fractional Fourier transform," *IEEE Signal Processing Letters* **3**, 72–74 (1996).
- [48] A. Zayed, "On the relationship between the Fourier and fractional Fourier transforms," *IEEE Signal Processing Letters*, **3**, 310–311 (1996).
- [49] F. S. Oktem, H. M. Ozaktas, "Linear canonical domains and degrees of freedom," J. J. Healy, M. A. Kutay, H. M. Ozaktas, J. T. Sheridan, editörler, *Linear Canonical Transforms: Theory and Applications* (New York: Springer, baskıda, 2014).
- [50] H. M. Ozaktas, F. S. Oktem, "Phase-space window and degrees of freedom of optical systems with multiple apertures," *Journal of the Optical Society of America A*, **30**, 682–690 (2013).
- [51] F. S. Oktem, H. M. Ozaktas, "Exact relation between continuous and discrete linear canonical transforms," *IEEE Signal Processing Letters* **16**, 727–730 (2009).
- [52] A. Stern, "Why is the linear canonical transform so little known?" *AIP Conference Proceedings* **860**, 225–234 (2006).
- [53] J. J. Healy, J. T. Sheridan, "Reevaluation of the direct method of calculating Fresnel and other linear canonical transforms," *Optics Letters* **35**, 947–949 (2010).