

Tek Bileşenli İşaretler için Eniyi Kısa-Zaman Fourier Dönüşümü Optimal Short-Time Fourier Transform for Monocomponent Signals

H. Emre Güven

Bilkent Üniversitesi,
Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü,
06800, Bilkent, Ankara, Türkiye.
e-mail: hguven@ee.bilkent.edu.tr

Özetçe

Son zamanlarda, kısa-zaman Fourier dönüşümü için yeni yöntemler geliştirildi. Bu yöntemler, işaretleri en az zaman-bant genişliği çarpımına sahip bir duruma getirmek için doğrusal kanonik dönüşümlerden yararlanmaktadır. Bu çalışmada doğrusal kanonik dönüşümler kullanarak yüksek derecede kiplenmiş işaretlerde en az zaman-bant genişliği çarpımını elde etmenin mümkün olmadığını gösterdik. Bu nedenle anlık sıklık değeri için başlangıç kestiricisi kullanan bir uyarlamalı pencere gerektiren yeni bir kısa-zaman Fourier dönüşümü yöntemi öneriyoruz. Yeni yöntem tek bileşenli işaretler için mümkün olan en iyi çözünürlüğü elde edebilmektedir.

Abstract

New methods of improving the short-time Fourier transform representation of signals have recently emerged. These methods use linear canonical transforms to bring the signal into a minimal time-bandwidth product form. Here we show that linear canonical transforms are not sufficient to achieve the minimum time-bandwidth product for high-order modulated monocomponent signals. Therefore we propose a novel short-time Fourier transform method which requires an adaptive window, making use of an initial instantaneous frequency estimator. The new approach is able to achieve the highest possible resolution for monocomponent signals. Finally, we discuss the benefits of the proposed method.

1. Giriş

Kısa-zaman Fourier dönüşümü (KZFD) uzun zamandır işaret çözümlemede önemli bir araç olarak kullanılmaktadır [1-6]. Her ne kadar Wigner dağılımı iyi yerelleşme özelliklerine sahipse de, bulundurduğu çapraz terimler, verilen herhangi bir zamandaki gerçek sıklık bileşenlerini tanımda zorluklara neden olmaktadır. Belirsizlik ilkesi ile kahtsal olarak sınırlanmış olan KZFD'nin [2] çözünürlüğünü arttırmak için çeşitli yöntemler daha önce önerilmiştir [3-6]. Yakın zamanda, pencere fonksiyonu üzerinde yapılan uygun bir işlem sayesinde, doğrusal kiplenmeli işaretlerin mümkün olan en yüksek yerelleşme ile ifade edilebileceği gösterildi [7]. Bu yöntemin en etkili olduğu işaretler

doğrusal kiplemeye sahip olanlardır. Çoklu pencere kullanımı sayesinde oldukça geliştirilmiş gösterimler elde edilebilse de, fazlaca kiplenmiş işaretleri, uygun hesaplama bedeli karşılığında ve doğrusal yaklaşılmaya gerek olmadan işleyebilen bir yöntem aramaktayız.

Bu çalışmada, çözümleme penceresi evrimleşen, işaretin zaman sıklık düzlemindeki yerel dağılımıyla uyumlu pencere kullanmayı öneriyoruz. Bu yaklaşım yüksek modulasyonlu enerji dayanağına sahip tek-bileşenli işaretler için uygundur. Bu yöntem üst limitin belirsizlik sınırı olmasını mümkün kılarak diğer kısa-zaman Fourier dönüşümlerinden daha iyi sonuçlar vermeyi garanti eder. Anlık sıklık için başlangıç kestirimi için istenilen yöntem kullanılabilir. Zaman kesiti başına hesaplama karmaşıklığının sıradan KZFD ile aynı olması, yöntemin uzun verilerdeki gibi gerçek zamanlı uygulamalarda kullanılabilmesini mümkün kılmaktadır. Bir sonraki bölümde zaman-bant genişliği çarpımının (ZBÇ) etkisi üzerine genel bilgi, üçüncü bölümde ise tek bileşenli işaretlere uygulanan yöntemimiz anlatılmıştır. Dördüncü bölümde yöntemin çokbileşenli işaretlere uygulanabilmesi için çok pencereli bir yordam sunulmuştur. Sonuçlara beşinci bölümde, gelecek çalışmalara da altıncı bölümde yer verilmiştir.

2. Küçük Zaman-Bant Genişliği Çarpımı Elde Etme Yöntemleri

Kısa-zaman Fourier dönüşümü için uyarlanırcı pencereler kullanılması düşüncesi daha önce uygulanmıştır [3-5]. Bu yöntemler ya eniyi pencere uzunluğunu ele almış, ya da zaman - sıklık dağılımına bağımlı olarak sabit pencereler önermişlerdir [6-7]. Aşağıdaki sistemde kullanılan doğrusal kanonik dönüşüm (DKD) [4] yüksek çözünürlük elde etmek zaman - sıklık düzleminde yalnızca bükme [6] ya da döndürme [7] işlemlerini genelleştirme açısından kuramsal öneme sahiptir. Buradaki temel düşünce, işarete başlangıçta bir DKD (C_M) uygulayıp zaman-bant genişliği çarpımını mümkün olduğunca küçültmek, yüksek çözünürlüklü dağılımı elde ettikten sonra da bunu C_M 'in 2×2 parametre matrisi M ile zaman - sıklık düzleminde eski yerine getirebilmektir. Yordamın işleyebilirliği, sistemin Resim 1-2'de görüldüğü gibi tek KZFD ile uygulanabilmesine dayanmaktadır. $x_m(t) = \{C_M x\}(t)$ işaretine göre en iyi pencere $h(t)$ şöyle bulunur [7]:

Araştırmanın yapılmasında baştan sona verdiği destek için Dr. Orhan Arıkan'a teşekkürler.

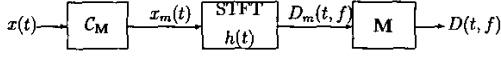


Figure 1: LKD kullanan KZFD sistemi.

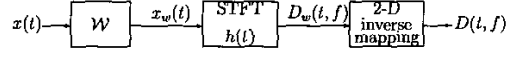


Figure 3: $\mathcal{W}\{x\}(t) = x_w(t)$ ile KZFD yordamı.

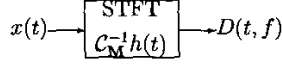


Figure 2: Tek KZFD ile denk sistem.

$$h(t) = e^{-\gamma\pi t^2} \quad (1)$$

$$\gamma = \frac{B_{x_m}}{T_{x_m}} \quad (2)$$

Uygun parametreler bilindiğinde sistem gerçekten de daha hassas sonuçlar verebilmektedir. Zaman–bant genişliği çarpımını küçültmek amacıyla, doğrusal kiplmeli işaretlerle evrim ve çarpma işlemlerinden istenen sayıda ve sırada kullanılabilmesine rağmen, ara işaretin omurgasını düzleştirmek daha yüksek dereceden kiplmeli işaretler için mümkün değildir. Yine de, tek bileşenli sinyaller için kullanılacak başka bir yöntem vardır. Sıradaki bölümde, bunun için gerekli sistem detaylarıyla anlatılmaktadır.

3. Uyarlanırlı Pencerele Eniyi Kısa–Zaman Fourier Dönüşümü

İkinci dereceden daha yüksek kiplmeli işaretlerde DKD kullanılarak en düşük zaman–bant genişliği çarpımını elde etmek mümkün değildir (Bkz. Ek-1). Örnek olarak zamanda kesişmeyen farklı artış oranlarına sahip doğrusal kiplmeli birkaç bileşenin birleşiminden oluşan bir işareti ele alalım. Tek bir pencere ile her bileşen için en düşük zaman–bant genişliği çarpımını elde etmek mümkün değildir. Ayrıca daha yüksek kiplmeli işaretlerde bu yöntemi etkili kılmak için bunları doğrusal modülasyonlu işaretlerin birleşimi olarak yaklaşılmak gerekecektir. Kwok ve Jones [6] aynı anda farklı artış oranlarına sahip birkaç pencere kullanıp yerel olarak en yoğun sonucu veren seçmeyi önermiştir. Belli bir hesaplama bedeli karşılığında bu yöntem yeterli performansı sağlayabilse de, tek-bileşenli işaretin bütün zamanlardaki eniyi gösterimini verecek zamanla değişen pencereyi elde etmemiz hala mümkündür.

Bu noktada işaretin anlık sıklığı ile bezenen uyarlanırlı bir pencere kullanmayı öneriyoruz. Buradaki asıl amaç pencerenin enerji dayanağının işaretinkiyle uyuşturulmasıdır. Gerçekten de KZFD'yi işaretin zaman ve sıklıkta kaydırılmış alçak geçiren pencereler cinsinden ifadesi olarak görürsek, yüksek çözünürlük sağlayan bu olguyu daha iyi açıklayabiliriz. $D(t, f)$ 'nin (t_0, f_0) zaman – frekans noktasındaki değeri, işaretin (t_0, f_0) 'ya kaymış alçak geçiren fonksiyon ile iç çarpımıdır. Pencere işlevinin birim enerjiye sahip olduğu gözönüne alınırsa $D(t, f)$ dağılımının (t, f) noktalarına kaymış alçak geçiren birim enerjili işlevler cinsinden ifadesi olduğu anlaşılır. Doğrusal kiplmeli işaret örneğimizde aynı artış oranına sahip pencere kullanırsak, her-

hangi bir anda, sıklıkta aşağıdan yukarı giderken iç çarpımın değeri sabit anlık sıklığa sahip pencere kullanılabileceğine göre daha kısa bir aralıkta sıfırdan farklı olacaktır. Yüksek derecede değişen anlık sıklığa sahip işaretler için genelleme yapacak olursak, incelenen işaretle yerel olarak benzer yönelime sahip işlevler kullanmanın en iyi çözünürlüğü vereceği anlaşılır.

Uyarlanırlı pencerenin matematiksel ifadesini çıkarmak için zaman – sıklık düzleminde bir dikdörtgen sıklık çevrelenebilen $x_w(t)$ 'nin eniyi zaman–bant genişliği çarpımına sahip gösterimi $D_w(t, f)$ ile aşağıdaki ilişkiye sahip bir $D(t, f)$ 'in bulunduğunu varsayalım. Zaman–bant genişliği için alt limit Gauss işaretlerde belirsizlik ilkesi sınırlıdır [7]. Yüksek sıklık bileşenler fazda bulunup işaretin büyüklüğünün yavaş değiştiği işaretlerde de elde edilen sonuçlar buna oldukça yakındır.

$$x(t) = x_w(t)e^{j2\pi\hat{f}_i(t)t} \Rightarrow D(t, f) = D_w(t, f - \hat{f}_i(t)) \quad (3)$$

Bu yordam gerçekte uygulama zorunluluğu olmadan, yalnızca zamanla değişen pencerele tek bir KZFD ifadesini elde etme amacına hizmet etmekte, aynı zamanda yüksek çözünürlüklü KZFD elde etmemizi sağlayan ilkenin anlaşılmasını sağlamaktadır. Gösterimler arasındaki ilişkiyi yazarsak:

$$\begin{aligned} D_w(t, f) &= \int x_w(\tau) e^{-\pi\gamma(\tau-t)^2} e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (4) \\ &= \int x(\tau) e^{-j2\pi\hat{f}_i(\tau)\tau} e^{-\pi\gamma(\tau-t)^2} e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(t, f) &= D_w(t, f - \hat{f}_i(t)) \quad (6) \\ &= \int x(\tau) e^{-\pi\gamma(\tau-t)^2} e^{-j2\pi\hat{f}_i(\tau)\tau} e^{-j2\pi(f-\hat{f}_i(t))\tau} d\tau \quad (7) \\ &= \int x(\tau) e^{-\pi\gamma(\tau-t)^2} e^{-j2\pi[\hat{f}_i(\tau)-\hat{f}_i(t)]\tau} e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (8) \end{aligned}$$

Buradan görüyoruz ki

$$h(t, \tau) = e^{-\pi\gamma(\tau-t)^2} e^{j2\pi[\hat{f}_i(\tau)-\hat{f}_i(t)]\tau} \quad (9)$$

anlık sıklık kestirimi $\hat{f}_i(t)$ olan tek bileşenli işaret için eniyi zamanla değişen pencere ifadesidir. Buradaki γ , $x_w(t)$ 'ye göre (1)'deki gibi zamanda optimizasyonu sağlamak üzere hesaplanabilir. $x_w(t)$ 'nin zaman–bant genişliği çarpımı küçük yerel saptamalardan fazla etkilenmediği için $\hat{f}_i(t)$ 'ye yapılan başlangıç kestirimi $\hat{f}_i(t)$ 'nin hata hoşgörüsü oldukça iyi olup dayanıklı bir zaman sıklık gösterimi sağlamaktadır. Başlangıçta yaptığımız anlık sıklık değeri kestirimine karşılık elde ettiğimiz son dağılım $D(t, f)$ çok daha iyi performans göstermektedir (Resim 7-8).

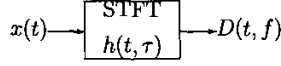


Figure 4: Zamanla değişen pencereleli KZFD.

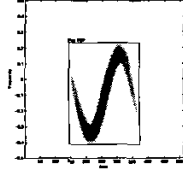


Figure 5: Gerçek ZBÇ

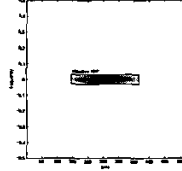


Figure 6: Etkin ZBÇ

Tek bileşenli işaretlerin çözünürlüğü yüksek KZFD elde etmek için önerdiğimiz yeni yöntem, işaretin kipleme derecesinden bağımsız olarak en iyi sonucu verebilmektedir. Bu yöntem, daha iyi sonuçlar vermeyi garanti etmek suretiyle herhangi bir anlık frekans kestirim yöntemiyle birlikte kullanılabilir. Gösterimi geliştirmek için, üzerinden yeni bir anlık sıklık kestirimi yaparak özyineli kullanmak da mümkündür.

Sinyalin anlık sıklık kestiriminde kriter, yakınına göreceli sıklık değişimi olduğu için, asıl değerden kaymalar sonucu etkilememektedir. Bütün zamanlarda aynı olan bir sıklık kaymasının çözünürlüğe hiçbir etkisi olmadığı gibi, bu herhangi bir kaymaya da sebep olmamaktadır. Yakın zaman komşuluğunda yapılan göreceli anlık sıklık kestirimi hataları ise yerleşmede küçük bir azalmaya sebep olmaktadır. Böyle durumlarda hatayı azaltmak için, -işaret yeterli sıklıkta örneklendiğinde- anlık sıklığın komşu zamanlarda yakın olması gerçeğinden yararlanarak, kestirim alçak geçer süzgeçlenebilir.

Kısa-zaman Fourier dönüşümünün yeni yöntemle bulunmasında hesaplama karmaşıklığında bir artma sözkonusu değildir. Pencere fonksiyonuna zaman değişimi eklemek sadece bir faz işleviyle çarpmaya karşılık geldiğinden $O(N)$, anlık sıklık kestirimi sonrasındaki hesaplama karmaşıklığı her zaman dilimi için $O(N \log N)$ olup sıradan KZFD ile aynıdır. Anlık sıklık kestirimi de standart KZFD ile yapılırsa, sistemin bütünü $O(N \log N)$ ile işleyecektir.

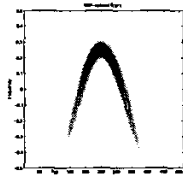


Figure 7: ZBÇ-optimal KZFD

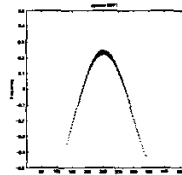


Figure 8: Önerilen KZFD

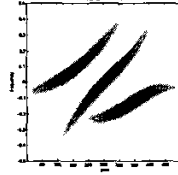


Figure 9: ZBÇ-optimal KZFD

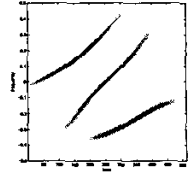


Figure 10: Önerilen KZFD

Algoritmanın adımları:

1. KZFD $D_o(t, f)$ ile başla (ZBÇ-optimal KZFD olabilir).
2. Her i 'nci işaret bileşeni için zaman-sıklık dayanağı S_i 'yi [9]'de verilen algoritma ile bul.
3. Her bileşenin omurgasını (9)'daki başlangıç kestirimi yerine koyarak $w_i(t, \tau)$ uyarlamalı pencerelerini bul.
4. Her $w_i(t, \tau)$ penceresi ile $D_i(t, f)$ KZFD'sini elde et.
5. Gösterimleri şu kurala göre birleştir:

$$D(t, f) = \begin{cases} D_i(t, f), & t, f \in S_i \text{ ve } \sigma_i^2 \leq \sigma_j^2, \forall j \\ D_o(t, f), & \text{aksi halde} \end{cases}$$

σ_i^2 , S_i içindeki anlık bant genişliğidir.

Table 1: Çok-pencereleli KZFD algoritması

4. Çokbileşenli işaretlere uygulama

Yukarıdaki tüm düşünceleri çok bileşenli işaretlere uygulamak mümkündür. Fakat bu durumda, aynı zamanda birden çok sıklık bileşeni olabileceği için, bileşenleri ayırtmak için daha karmaşık bir algoritmaya ihtiyaç vardır. Görüntü işleme tekniklerinden ödünç alınan bir yöntemle [8] işaret bileşenlerinin zaman-sıklık düzlemindeki yaklaşık yerlerini kestirmek mümkündür [9]. Bu teknik, bileşke işaretin her bir bileşenini ayrı ele almak üzere zaman-sıklık düzlemini verimli şekilde bölebilmektedir. Her bileşenin kendi dayanağında ortalamasını alarak o bileşenin anlık sıklığını yakından takip eden omurgasını çıkarmak mümkündür. Böylece, işaretin her bileşeni önceki bölümde anlatılan yöntemle ayrı ayrı işlenebilir.

Aşağıdaki örnekte zamanda kesişen üç bileşenden oluşan yapay bir işarete çokpencereleli uyarlamalı yöntemin uygulaması yer almaktadır (Resim 9-10). Her bileşenin omurgası, görüntü işleme algoritmasıyla hesaplanmış [9] ve o bileşenin anlık sıklık kestirimi olarak kullanılmıştır. Son olarak dönüşümler her dayanak içinde en düşük bant genişliğine sahip olanın tutulmasını taban alan kurala göre birleştirilmiştir. Bu kural ile dağıntık bölgelerin elenip yüksek çözünürlüklü dönüşümlerin birleştirilmesi sağlanabilir. Bu prosedür için öngörülen algoritma Tablo 1'de verilmiştir.

5. Sonuç

Doğrusal kanonik dönüşümler kullanılarak zaman - sıklık dayanağı doğrusal yönelimli işaretlerde yüksek çözünürlüklü KZFD'ler elde edilebilmektedir. Ancak burada gösterdik ki yüksek kiplemeli işaretlerde DKD yeterli bir araç değildir. Genelde takip edilecek işaretler rasgele anlık sıklık değişimlerine sahip olabilir. Bu nedenle mümkün olan en iyi çözünürlüğü elde edebilmek için zamanla değişen bir pencereye ihtiyaç duyulmaktadır. Sonuç,

gelişigüzel anlık sıklığa sahip Gauss zarflı işaretlerde belirsizlik sınırını elde etmeyi mümkün kıldığı için kuramsal bir önem taşımaktadır.

Özet olarak, anlık sıklık uyarlamalı pencere tek bileşenli işaretler için çok iyi sonuçlar vermektedir. Yöntem, standart KZFD ile aynı işlem bedelindedir. Yöntemi çokbileşenli işaretlere uygulamak her bileşenin ayrı işlenmesiyle mümkündür.

6. Gelecek Çalışma

Gelecek araştırmalarda yöntem bileşenleri kesişen çokbileşenli işaretlere uygulanacaktır. Enerji dayanağı kesişen bileşenler için bu işlem zorlaştığından, bileşenler arası sızıntıyı endüyük seviyeye indirmek için yerel büyüklüklere dayalı kestirimler yapan otomatik bir yonteme ihtiyaç vardır. Buna karşılık bileşenleri ayırmak mümkün olursa KZFD'nin doğrusallığından yararlanarak burada yaptığımız gibi birleşik bir gösterim elde etmek mümkündür.

A. Ek

Theorem 1. $x(t) = A(t)e^{j\phi(t)}$, $A(t)$, $\phi(t) \in \mathbf{R}$, ve

$$\mathcal{W}\{x\}(t) = x_w(t) = x(t)e^{-j\phi(t)}. \quad (10)$$

$x(t)$ için endüyük zaman-bant genişliği çarpımlı KZFD $x_w(t)$ 'nin KZFD'si ile şu ilişkiye sahipse:

$$D(t, f) = D_w(t, -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi(t) + f),$$

\mathcal{W} doğrusal kanonik dönüşüm değilse, $D(t, f)$ sabit pencereli tek bir KZFD olarak elde edilemez.

Proof.

$$D_w(t, f) = \int x(\tau) e^{-j\phi(\tau)} h^*(\tau - t) e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (11)$$

$$D(t, f) = D_w(t, -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi(t) + f) \quad (12)$$

$$= \int x(\tau) e^{-j\phi(\tau)} h^*(\tau - t) e^{-j2\pi(-\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi(t) + f)\tau} d\tau \quad (13)$$

$$= \int x(\tau) h^*(\tau - t) e^{-j[\phi(\tau) - \tau \frac{d}{dt} \phi(t) + \varphi(t)]} e^{-j2\pi f \tau} d\tau \quad (14)$$

$D(t, f)$ 'yi büyüklüğüyle değerlendirdiğimiz için son satıra geçerken yapılan t 'li karmaşık üstel işlev ile çarpımda sakınca yoktur. h 'in zamanla değişmez olabilmesi için son ifadedeki tümlevin içindeki karmaşık üstel kısmın yalnızca $(\tau - t)$ 'nin işlevi olması gerekir. Ancak bu, $\phi(t)$ 'yi 2 veya daha az dereceli bir çokterimli olmaya zorlar. Bu da ancak \mathcal{W} 'nin doğrusal kanonik dönüşüm olması ile mümkündür. Bu nedenle, yukarıdaki sistem ancak \mathcal{W} doğrusal kanonik dönüşüm olduğunda tek bir değişmeyen zamanlı pencere işlevi ile gerçekleştirilebilir. \square

B. Kaynakça

- [1] F. Hlawatsch and G.F Boudreaux-Bartels, "Linear and quadratic time-frequency signal representations," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 9, no. 2, pp. 21–67, April 1992.
- [2] L. Cohen, "Time-frequency representations — a review," *Proceedings of the IEEE*, vol. 77, no. 7, pp. 941–981, July 1989.
- [3] D. L. Jones and R. G. Baraniuk, "A simple scheme for adapting time-frequency representations," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 42, no. 12, pp. 3530–3535, Dec. 1994.
- [4] H. M. Ozaktas, Z. Zalevsky, and M. A. Kutay, *The Fractional Fourier Transform with Applications in Optics and Signal Processing*, Wiley, 2001.
- [5] H. M. Ozaktas, O. Arikan, M. A. Kutay, and G. Bozdagi, "Digital computation of the fractional fourier transform," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 44, no. 9, pp. 2141–2150, Sept. 1996.
- [6] H. K. C. Kwok and D. L. Jones, "Improved instantaneous frequency estimation using an adaptive short-time fourier transform," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 48, no. 10, pp. 2964–2972, Oct. 2000.
- [7] L. Durak and O. Arikan, "Short-time fourier transform: Two fundamental properties and an optimal implementation," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 51, no. 5, pp. 1231–1242, May 2003.
- [8] L. Vincent and P. Soille, "Watersheds in digital spaces: An efficient algorithm based on immersion simulations," *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 13, no. 6, pp. 583–598, June 1991.
- [9] O. Arikan and A. K. Ozdemir, "An efficient algorithm to extract components of a composite signal," *IEEE Int. Conf. Acoust. Speech and Signal Process.*, vol. 2, pp. 697–700, June 2002.