

Dağıtılmış Ağ Üzerinde Skaler Yayınım Stratejisinin Performans Analizi

Performance Analysis of Scalar Diffusion Strategy Over Distributed Network

Muhammed Ö. Sayın, Süleyman S. Kozat
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Bilkent Üniversitesi
{sayin, kozat}@ee.bilkent.edu.tr

Özetçe —Bu bildiri, dağıtılmış ağ üzerinde skaler yayınım stratejisinin tüm performans analizlerini sunuyoruz. Skaler yayınım stratejileri yayınım uygulamasına ve skalere kadar sıkıştırılmış yayınım verisinden bilginin uyarlanabilir bir şekilde çıkarılmasına dayanır. Bu strateji tüm bilginin değişik tokuş edildiği yapıların performansına benzer bir performans sergilerken önemli ölçüde daha az iletişim yükü gerektirir. Burada, Gauss dağılımına sahip açıklayıcı değişkenler için skaler yayınım stratejilerinin geçici rejim ve sürekli rejim analizlerini sağlıyoruz. Son olarak, sayısal deneylerimizde teorik sonuçlarımızın deney sonuçlarıyla eşleştiğini gösteriyoruz.

Anahtar Kelimeler—Sıkıştırılmış yayınım, skaler yayınım, dağıtılmış ağ, performans analizi.

Abstract—In this paper, we present a complete performance analysis of the scalar diffusion strategies over distributed networks. Scalar diffusion strategies are based on the diffusion implementation and adaptive extraction of the information from the diffusion data which is compressed into a scalar. This strategy require significantly less communication load while achieving similar performance with the full information exchange configuration. Here, we provide the transient and steady-state analysis of the scalar diffusion strategies for Gaussian regressors. Finally, in the numerical examples, we demonstrate that the theoretical results match with the simulation results.

Keywords—Compressive diffusion, scalar diffusion, distributed network, performance analysis.

I. GİRİŞ

Dağıtılmış ağ üzerinde sinyal işleme; kaynak takibi, ortam görüntüleme ve kaynak yerleştirme gibi uygulamalarda üstün performans sağlar [1]. Üstün performans gösterilmesinde ağ içerisindeki her bir boğumun izlenen olgu hakkında yeni bir bakış açısı kazandırması etkilidir. Bu yüzden her bir boğumun gözlemlemiş olduğu veri önem arz etmektedir. Dağıtılmış uyarlanabilir kestirim çerçevesi içerisinde her bir boğumun kendi kestirim algoritmasını kullanarak en iyi sonuca ulaşması beklenir. En iyi sonuç tüm verinin toplanmasıyla elde edilecektir ancak bir alan üzerinde dağıtılmış durumda olan her bir boğumun tüm veriyi toplaması büyük bir iletişim yükü getirecektir [1], [2], [5]. Bunun üstesinden gelebilmek için

boğumlar arası iletişimi tanımlayan yayınım uygulaması gibi çeşitli protokoller bulunmaktadır.

Yayınım uygulaması boğumlar arası iletişimi önceden tanımlanmış komşuluklar içerisinde sınırlı tutar. Her bir boğum komşusuna kendi kestirim parametre vektörünü yayar ve komşularından gelen parametre vektörlerini kullanarak da son kestirim parametresini oluşturur [1]. [2]'de yazarlar yayınım uygulamasını en küçük ortalama kare algoritması kullanarak, komşulardan alınan verilerin uygun bir şekilde birleştirilmesi durumunda yayınım uygulamasının performans üzerinde olumlu etkisi olacağını gösterir. Ancak tüm parametre vektörünün yayılması da önemli bir iletişim yükü getirecektir.

Literatürde iletişim yükünü azaltmak için önerilen çeşitli stratejiler bulunmaktadır [3]–[5]. Seçimli işbirliği olarak adlandırılan bir yöntem, boğumların yayım yapıp yapmayacaklarını küme üyeliği çerçevesi içerisinde düzenleyerek iletişim yükünü azaltmayı amaçlar [3]. Bir diğer strateji, bant genişliği gereksiniminden dolayı yayılan parametre vektörlerini kuantalar ve kuantalama işlemi iletişim yükünü azaltır [4]. Skaler yayınım strateji ise bunlardan farklı olarak boğumların sadece skaler veri yaydığı ve orjinal parametre vektörünün bir skaler üzerinden uyarlanır şekilde elde edildiği bir protokol tanımlar [5]. Böylece, skaler yayınım stratejisi bir vektör yaymak yerine sadece bir skaler yayarak iletişim yükünü ciddi anlamda azaltırken tüm vektörün yayıldığı yapılarla karşılaştırılabilir performans sergilemektedir. Ağ büyüklüğü arttıkça iletişim yükü daha da artacağından skaler yayınım stratejisi dağıtılmış sinyal işleme sistemleri için önem arz etmektedir. Ayrıca skaler yayınım stratejisi, seçimli işbirliği veya kuantalama işlemlerinin uygulanmasına engel olmadığı gibi onlarla birlikte uygulandığında iletişim yükünü daha fazla azaltacaktır.

Bu bildiri biz, skaler yayınım stratejisinin tüm performans analizlerini sağlıyoruz. Gauss dağılımına sahip açıklayıcı değişkenler için geçici ve sürekli rejim analizlerini yapıyoruz. Şunu not etmek gerekir ki orjinal parametre vektörünün bir skalerden uyarlanır bir şekilde elde edilmesi ek uyarlama düzeyi getirdiğinden dağıtılmış ağ üzerinde skaler yayınım stratejisinin analizini yapmak basit değildir. Son olarak da sayısal deneylerimizle teorik sonuçların deney sonuçlarıyla eşleştiğini gösteriyoruz.

Bildirinin organizasyonu şu şekildedir. Bölüm II'de skaler yayılım stratejisi tanıtılacak. Bölüm III'te sırasıyla geçici rejim, sürekli rejim ve izleme performansı analizleri yapılacak. Bölüm IV'te teorik ve deneysel sonuçların eşleştiği gösterilecek ve Bölüm V'te verilen sonuçlarla bildirimiz tamamlanacaktır.

II. SKALER YAYINIM STRATEJİSİ

N tane boğumdan oluşan bir ağı ele alalım. Burada i . boğumun istenilen sinyal $d_{i,t}$ 'yi aşağıdaki gibi doğrusal olarak gözlemlediğini varsayıyoruz¹:

$$d_{i,t} = \mathbf{w}_o^T \mathbf{u}_{i,t} + v_{i,t}.$$

Bu ifadede $\mathbf{u}_{i,t} \in \mathbb{R}^p$ bağlantım sinyal vektörüne, $\mathbf{w}_o \in \mathbb{R}^p$ aranan parametre vektörüne ve $v_{i,t}$ bağlantım sinyalinin bağımsız gürültü sinyaline karşılık gelmektedir. Herhangi bir bağlantım sinyalinin uzamsal ve zamansal olarak diğer bağlantım sinyallerinden ve gürültü sinyallerinden bağımsız olduğunu varsayıyoruz.

Dağıtılmış uyarlanabilir kestirim çerçevesi içerisinde her bir boğum, bir yerel kestirim algoritması kullanarak aranan parametre vektörünü kestirmeye çalışır. Analizlerimizde bu kestirim algoritmasını en küçük ortalama kare (LMS) algoritması olarak seçiyoruz. Bir alan üzerinde dağıtılmış boğumlar aranan parametre için yeni bakış açıları sağlar. Ancak her bir boğumun tüm gözlemlenen sinyallere erişimi ciddi bir iletişim yükü getireceğinden yayılım uygulaması boğumlar arası iletişimi önceden tanımlanmış komşuluklarla sınırlı tutar. Yayılım uygulaması içerisinde [2]'de yazarlar yayılan bilgiyi kestirilen parametre vektörü olarak seçiyor. Ancak biz skaler yayılım stratejisinde tüm parametre vektörünü yaymak yerine bilgiyi bir skaler içerisine sıkıştırıp yayacağız. Ancak bunu yaparken herhangi bir sıkıştırılabilirlik veya seyreklik varsayımında bulunmadığımızdan bilgiyi yitimli bir şekilde sıkıştırıp ve sonrasında skaler veriden uyarlanırlık bir şekilde çıkarmaya çalışacağız.

Kestirim parametre vektöründen yayılacak skaleri oluştururken bir izdüşümü operatöründen yararlanacağız. $\mathbf{c}_t \in \mathbb{R}^p$ bu izdüşümü operatörü ve $z_{i,t}$ de yayılacak skaler olsun. i . boğumun kestirim parametresini $\phi_{i,t}$ olarak tanımlarsak yayılan skaleri $z_{i,t} = \mathbf{c}_t^T \phi_{i,t}$ ifadesiyle oluşturabiliriz. Sıkıştırılmış bilgiyi geri elde ederken $z_{i,t}$ 'yi istenilen sinyal olarak ele alıp, kestirim algoritmaları kullanarak istenilen sinyali kestirmeye çalışacağız. $\mathbf{a}_{i,t} \in \mathbb{R}^p$ bu kestirim parametre vektörü olsun ve kestirim algoritması olarak sistemdeki simetriyi korumak adına LMS algoritmasını kullanalım. Son olarak i . boğum komşularından gelen skalerlerden $\mathbf{a}_{j,t+1}$ kestirim vektörlerini ürettikten sonra yerel kestirim vektörü $\phi_{i,t+1}$ ve komşuların kestirim vektörlerine karşılık gelen $\mathbf{a}_{j,t+1}$ 'ler dış büyük bir set üzerinde aşağıdaki gibi doğrusal olarak birleştirilerek son kestirim parametresi $\mathbf{w}_{i,t+1}$ elde edilir:

$$\mathbf{w}_{i,t+1} = \gamma_{i,i} \phi_{i,t+1} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i \setminus i} \gamma_{i,j} \mathbf{a}_{j,t+1}.$$

¹ Simgelem: Vektörler küçük koyu harflerle gösterilir. Zaman değişkeni alt-indiste yer alır. \mathbf{a} vektörü için \mathbf{a}^T sıradan çarpazlama işlemine, $\|\cdot\|$ L2-düzgesine ve $\|\cdot\|_{\mathbf{A}}$ keskin artı matrisi \mathbf{A} için ağırlıklı L2-düzgesine karşılık gelir. $\text{Tr}(\mathbf{A})$, \mathbf{A} matrisinin izini verir. $\text{col}\{\cdot\}$ işleci bir sütun vektörü veya işleç içeriğinin bir matris içerisinde alt alta yerleştirilmesi işlemini gerçekleştirir. Bir matris için $\text{diag}\{\cdot\}$ işleci matrisi köşegen elemanlarından bir vektör oluştururken, bir vektör için köşegeninde vektörün elemanları bulunan bir matris oluşturur. \otimes işleci matrislerin Kronecker çarpımını alır.

Burada \mathcal{N}_i , i . boğumun komşuluk setini tanımlamaktadır ve birleşim ağırlıkları $\gamma_{i,j}$ 'ler dış büyük bir setten seçilir, şöyleki:

$$\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \gamma_{i,j} = 1 \quad \forall i \text{ ve } \gamma_{i,j} \geq 0 \quad \forall i, j.$$

Birleşim ağırlıklarının nasıl seçildiği sistemin performansını doğrudan etkileyecektir. Literatürde çeşitli birleşim kuralları bulunmaktadır [1], [2]. Sonuç olarak skaler yayılım stratejisi şu şekilde özetlenebilir:

$$\phi_{i,t+1} = \mathbf{w}_{i,t} + \mu_i \mathbf{u}_{i,t} (d_{i,t} - \mathbf{u}_{i,t}^T \mathbf{w}_{i,t}) \quad (1)$$

$$\mathbf{a}_{j,t+1} = \mathbf{a}_{j,t} + \eta_j \mathbf{c}_t^T (\phi_{j,t} - \mathbf{a}_{j,t}) \quad (2)$$

$$\mathbf{w}_{i,t+1} = \gamma_{i,i} \phi_{i,t+1} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i \setminus i} \gamma_{i,j} \mathbf{a}_{j,t+1}.$$

Sıkıştırılmış bilgiyi verimli bir şekilde geri elde edebilmek için izdüşümü operatörünü, zamanla değiştirerek tüm parametre uzayını kaplayacağı şekilde seçiyoruz. Bunu yaparken sözde rasgele sayı üreticilerini kullanabilir ve pilot sinyalizasyonu da eşzamanlamasını, önemli bir iletişim yükü gerektirmeksizin, yapabiliriz [5].

Bir sonraki kısımda skaler yayılım stratejisinin performans analizini yapıyoruz.

III. PERFORMANS ANALİZİ

Analizlerimizde tüm ağ üzerindeki algoritmaları tek bir algoritmaymış gibi ele alıp ve o tek algoritmanın analizini yapacağız. Bunun için durum uzayı gösteriminden faydalanıp, boğumlar arası farklılık gösteren parametreleri matrisler içerisinde toplayarak tek bir parametremiş gibi ele alacağız. Durum uzayı gösterimi için aşağıdaki evrensel parametreleri tanımlıyoruz:

$$\begin{aligned} \phi_t &= \text{col}\{\phi_{1,t}, \dots, \phi_{N,t}\}, \quad \mathbf{a}_t = \text{col}\{\mathbf{a}_{1,t}, \dots, \mathbf{a}_{N,t}\}, \\ \mathbf{w}_t &= \text{col}\{\mathbf{w}_{1,t}, \dots, \mathbf{w}_{N,t}\}, \quad \mathbf{w}_o = \text{col}\{\mathbf{w}_o, \dots, \mathbf{w}_o\}, \\ \mathbf{d}_t &= \text{col}\{d_{1,t}, \dots, d_{N,t}\}, \quad \mathbf{v}_t = \text{col}\{v_{1,t}, \dots, v_{N,t}\}. \end{aligned}$$

Tüm birleşim ağırlıklarını içeren birleşim matrisi ise şu şekildedir:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{N1} & \cdots & \gamma_{NN} \end{bmatrix}$$

ve $\mathbf{G} \triangleq \mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{I}_M$ belirtir. Analizlerimizde kolaylık sağlamak için her bir boğumun farklı bir izdüşümü operatörü ($\mathbf{c}_{i,t}$) kullandığını varsayıyoruz. Böylece bağlantım ve izdüşümü vektörleri için aşağıdaki $MN \times N$ boyutuna sahip evrensel matrisleri elde ediyoruz:

$$\mathbf{U}_t \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{1,t} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{u}_{N,t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_t \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{1,t} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{c}_{N,t} \end{bmatrix}.$$

Birleşim matrisi $\mathbf{\Gamma}$ 'i parçalarsak ($\mathbf{\Gamma}_D = \text{diag}\{\mathbf{\Gamma}\}$ ve $\mathbf{\Gamma}_C = \mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}_D$) \mathbf{w}_t evrensel vektörünü ϕ_t ve \mathbf{a}_t cinsinden şu şekilde yazabiliriz:

$$\mathbf{w}_t = \mathbf{G}_D \phi_t + \mathbf{G}_C \mathbf{a}_t,$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\psi}_{t+1} \\ \tilde{\phi}_{t+1} \\ \tilde{\mathbf{a}}_{t+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G}_D & \mathbf{G}_C \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{MN} \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\psi}_t \\ \tilde{\phi}_t \\ \tilde{\mathbf{a}}_t \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_t} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{U}_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_t \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}_t} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_t \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_t} \quad (3)$$

burada $\mathbf{G}_D \triangleq \Gamma_D \otimes \mathbf{I}_M$ ve $\mathbf{G}_C \triangleq \Gamma_C \otimes \mathbf{I}_M$ şeklinde tanımlanır. (1) ve (2)'deki adım büyüklüklerini içeren evrensel matrisleri de $\mathbf{M} \triangleq \text{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_N\} \otimes \mathbf{I}_M$ ve $\mathbf{N} \triangleq \text{diag}\{\eta_1, \dots, \eta_N\} \otimes \mathbf{I}_M$ şeklinde tanımlayabiliriz ve sonuç olarak (3)'teki ifadeyi elde ederiz. Bu ifadeye $\tilde{\phi}_t$ ve $\tilde{\mathbf{a}}_t$ sapma vektörlerini belirtir, şöyleki:

$$\tilde{\phi}_t \triangleq \mathbf{w}_o - \phi_t \text{ ve } \tilde{\mathbf{a}}_t \triangleq \mathbf{w}_o - \mathbf{a}_t. \quad (4)$$

Ayrıca hata vektörleri \mathbf{e}_t ve $\mathbf{\epsilon}_t$ şu şekilde tanımlanır:

$$\mathbf{e}_t = \text{col}\{e_{1,t}, \dots, e_{N,t}\}, \quad \mathbf{\epsilon}_t = \text{col}\{\epsilon_{1,t}, \dots, \epsilon_{N,t}\}$$

ve $e_{i,t} = d_{i,t} - \mathbf{u}_{i,t}^T \mathbf{w}_{i,t}$, $\epsilon_{i,t} = z_{i,t} - \mathbf{c}_{i,t}^T \mathbf{a}_{i,t}$. Kısaca (3) şu şekilde ifade edilebilir:

$$\tilde{\psi}_{t+1} = \mathbf{X} \tilde{\psi}_t - \mathbf{D} \mathbf{Y}_t \mathbf{e}_t. \quad (5)$$

Bir sonraki kısımda (5)'in geçici rejim analizini yapacağız.

A. Geçici Rejim Analizi

Birleşim ağırlıkları dış bükey set içerisinde seçildiğinden $\Gamma \mathbf{1} = \mathbf{1}$ ve $\mathbf{G} \mathbf{w}_o = \mathbf{w}_o$. Öyleyse (4)'ü kullanırsak evrensel hata vektörü \mathbf{e}_t 'yi şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_t &= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_t \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G}_D & \mathbf{G}_C \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Z}} \begin{bmatrix} \tilde{\phi}_t \\ \tilde{\mathbf{a}}_t \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_t \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{n}_t} \\ &= \mathbf{Y}_t^T \mathbf{Z} \tilde{\psi}_t + \mathbf{n}_t. \end{aligned} \quad (6)$$

(6)'daki ifade ve (5)'i kullanırsak şunu elde ederiz:

$$\tilde{\psi}_{t+1} = \mathbf{X} \tilde{\psi}_t - \mathbf{D} \mathbf{Y}_t (\mathbf{Y}_t^T \mathbf{Z} \tilde{\psi}_t + \mathbf{n}_t). \quad (7)$$

Performans analizinde hatanın ve sapma parametrelerinin enerjilerini ilişkilendirirken Σ ile belirttiğimiz bir ağırlık matrisi kullanacağız [6]. Gürültünün ağ istatistiklerinden bağımsız olduğunu varsaydığımız için (7) aşağıdaki ağırlıklı enerji ilişkisini verir:

$$E \|\tilde{\psi}_{t+1}\|_{\Sigma}^2 = E \|\tilde{\psi}_t\|_{\Sigma'}^2 + E[\mathbf{n}_t^T \mathbf{Y}_t^T \mathbf{D} \Sigma \mathbf{D} \mathbf{Y}_t \mathbf{n}_t] \quad (8)$$

burada $\Sigma' \triangleq (\mathbf{X} - \mathbf{D} \mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_t^T \mathbf{Z})^T \Sigma (\mathbf{X} - \mathbf{D} \mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_t^T \mathbf{Z})$. Σ matrisinden farklı olarak Σ' veriye bağımlı olduğundan rasgele değişkendir. Ancak bağlanım sinyallerinin uzamsal ve zamansal olarak bağımsız olduğunu varsaydığımızdan \mathbf{Y}_t , $\tilde{\psi}_t$ 'den bağımsızdır. Böylece Σ' 'i beklenen değeri ile değiştirebiliriz, şöyleki $\Sigma' = E[\Sigma']$ [2]. Sonuç olarak Σ' şu şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} \Sigma' &= \mathbf{X}^T \Sigma \mathbf{X} - \mathbf{Z}^T E[\mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_t^T] \mathbf{D} \Sigma \mathbf{X} - \mathbf{X}^T \Sigma \mathbf{D} E[\mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_t^T] \mathbf{Z} \\ &\quad + \mathbf{Z}^T \mathbf{D} E[\mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_t^T \Sigma \mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_t^T] \mathbf{D} \mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (9)$$

Matrislerin diyagonal yapılarından faydalanabilmek için uygun vektörleştirme yöntemlerine başvuracağız [6]. Bunun için blok vektörleştirme işlemini ($\text{bvec}\{\cdot\}$) ve herhangi \mathbf{A} ve \mathbf{B} matrisleri için blok Kronecker çarpımını ($\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$) kullanacağız. Blok Kronecker çarpımı ve $\text{bvec}\{\cdot\}$ arasında şöyle bir ilişki bulunmaktadır:

$$\text{bvec}\{\mathbf{A} \Sigma \mathbf{B}\} = (\mathbf{B}^T \odot \mathbf{A}) \text{bvec}\{\Sigma\}, \quad (10)$$

$$\text{Tr}\{\mathbf{A}^T \mathbf{B}\} = (\text{bvec}\{\mathbf{A}\})^T \text{bvec}\{\mathbf{B}\}. \quad (11)$$

Bağlanım sinyallerinin ve izdüşümü operatörlerinin birbirinden bağımsız olduğunu varsayıyoruz. Böylece $E[\mathbf{U}_t \mathbf{U}_t^T] = \Lambda_u$ ve $E[\mathbf{C}_t \mathbf{C}_t^T] = \Lambda_c$ şeklinde tanımlanırsa

$$\Lambda \triangleq E[\mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_t^T] = \begin{bmatrix} \Lambda_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_c \end{bmatrix}.$$

olur. (10)'dan yararlanırsak (9)'daki son ifadenin blok vektör formunu şu şekilde yazabiliriz:

$$\text{bvec}\{E[\mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_t^T \Sigma \mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_t^T]\} = \mathcal{A} \text{bvec}\{\Sigma\}$$

burada $\mathcal{A} = \text{bvec}\{E[\mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_t^T \odot \mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_t^T]\}$. Ancak bu beklenen değer sadece özel durumlar için kapalı bir formda hesaplanabilir. Gauss dağılımı varsayımı altında [6] $\mathcal{A} = \text{diag}\{\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_N\}$, $\mathcal{A}_j = \text{diag}\{\mathcal{A}_{1j}, \dots, \mathcal{A}_{Nj}\}$ ve

$$\mathcal{A}_{ij} = \begin{cases} 2\Lambda_i \otimes \Lambda_i + \lambda_i \lambda_i^T & i = j \\ \Lambda_i \otimes \Lambda_j & i \neq j \end{cases}$$

burada $\lambda_i = \text{vec}\{\Lambda_i\}$ ve Λ_i 'ler, Λ matrisinin $M \times M$ boyutlarına sahip blok parçalarıdır, şöyleki $\Lambda = \text{diag}\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_N\}$. (11)'den yararlanarak (8)'deki son ifadeyi şu şekilde hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{n}_t^T \mathbf{Y}_t^T \mathbf{D} \Sigma \mathbf{D} \mathbf{Y}_t \mathbf{n}_t] &= \text{Tr}(\Lambda \mathbf{D}^2 E[\mathbf{n}_t \mathbf{n}_t^T] \Sigma) \\ &= \text{bvec}\{E[\mathbf{n}_t \mathbf{n}_t^T] \mathbf{D}^2 \Lambda\}^T \text{bvec}\{\Sigma\}. \end{aligned}$$

Sonuç olarak aşağıdaki ağırlıklı enerji ilişkisini elde ederiz:

$$E \|\tilde{\psi}_{t+1}\|_{\sigma}^2 = E \|\tilde{\psi}_t\|_{\mathbf{F} \sigma}^2 + \mathbf{b}^T \sigma \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &\triangleq \mathbf{X}^T \odot \mathbf{X}^T + (\mathbf{Z}^T \odot \mathbf{Z}^T) (\mathbf{D} \odot \mathbf{D}) \mathcal{A} \\ &\quad - (\mathbf{X}^T \odot \mathbf{Z}^T) (\mathbf{I}_{2MN} \odot \Lambda \mathbf{D}) \\ &\quad - (\mathbf{Z}^T \odot \mathbf{X}^T) (\Lambda \mathbf{D} \odot \mathbf{I}_{2MN}) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\mathbf{b} \triangleq \text{bvec}\{E[\mathbf{n}_t \mathbf{n}_t^T] \mathbf{D}^2 \Lambda\}$$

Yukarıdaki ifadelerde $\sigma = \text{bvec}\{\Sigma\}$ belirtir ve simgelemi basit tutmak adına $E \|\tilde{\psi}_{t+1}\|_{\text{bvec}\{\Sigma\}}^2$ kullanmak yerine $E \|\tilde{\psi}_{t+1}\|_{\sigma}^2$ kullanıyoruz.

Tüm kestirim parametrelerinin ($\phi_{i,t}$ ve $\mathbf{a}_{i,t}$) başlangıçta sıfırlanmış olduğunu varsayarsak $E \|\tilde{\psi}_0\|^2 = \|\underline{\mathbf{w}}_o\|^2$ ve $\underline{\mathbf{w}}_o \triangleq$

$\text{col}\{\mathbf{w}_o, \mathbf{w}_o\}$. (12) ve (13) ifadelerinin döngüsü sonucu aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$E\|\tilde{\psi}_{t+1}\|_{\sigma}^2 = E\|\tilde{\psi}_t\|_{\sigma}^2 + \mathbf{b}^T \mathbf{F}^t \sigma - \|\underline{\mathbf{w}}_o\|_{\mathbf{F}^t (\mathbf{I}-\mathbf{F})\sigma}^2 \quad (14)$$

(14) ifadesinde farklı ağırlık matrisleri seçerek farklı parametrelerin geçici rejim analizini yapabiliriz. Örneğin

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{MN} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ için } E\|\tilde{\psi}_t\|_{\sigma}^2 = E\|\tilde{\phi}_t\|^2$$

veya

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_D^T \mathbf{G}_D & \mathbf{G}_D^T \mathbf{G}_C \\ \mathbf{G}_C^T \mathbf{G}_D & \mathbf{G}_C^T \mathbf{G}_C \end{bmatrix} \text{ için } E\|\tilde{\psi}_t\|_{\sigma}^2 = E\|\tilde{\mathbf{w}}_t\|^2$$

burada $\tilde{\mathbf{w}}_t \triangleq \mathbf{w}_o - \mathbf{w}_t$. Bir sonraki bölümde skaler yayının stratejisinin sürekli rejim analizini yapacağız.

B. Sürekli Rejim Analizi

Sürekli rejimde (12) ilişkisi aşağıdaki sonucu verir:

$$E\|\tilde{\psi}_{\infty}\|_{(\mathbf{I}-\mathbf{F})\sigma}^2 = \mathbf{b}^T \sigma.$$

$E\|\tilde{\psi}_{\infty}\|_{\sigma}^2$ ifadesini hesaplayabilmek için ağırlık matrisini şu şekilde seçeceğiz: $\sigma' = (\mathbf{I}-\mathbf{F})\sigma$ ve sonuç olarak sürekli rejim performansı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E\|\tilde{\psi}_{\infty}\|_{\sigma'}^2 = \mathbf{b}^T (\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1} \sigma'.$$

Bir sonraki bölümde skaler yayının stratejisinin performansını sayısal deneyde değerlendireceğiz.

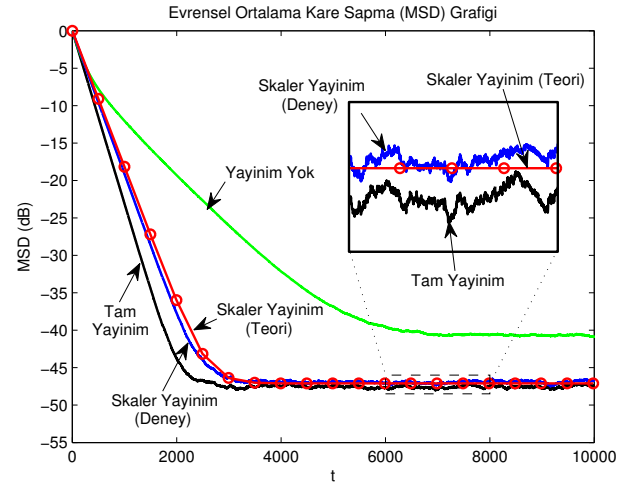
IV. SAYISAL DENEYLER

Burada 5 boğumdan oluşan bir dağıtılmış ağı ele alıyoruz. Boğumlar istenilen sinyali doğrusal olarak gözlemliyorlar, şöyle ki $\forall i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ $d_{i,t} = \mathbf{w}_o^T \mathbf{u}_{i,t} + v_{i,t}$ ve bağlantım sinyalleri $\mathbf{u}_{i,t} \in \mathbb{R}^4$ sıfır ortalamalı, Gauss dağılımına sahip ve standart sapmaları $\sigma_{u_i} = 0, 1(\sqrt{10}-1)\mathcal{U}[0, 1]+0, 1$ yöntemiyle seçilen rasgele vektör süreçler. Gürültü sinyalleri ise sıfır ortalamalı, Gauss dağılımına sahip, varyansı $\sigma_{v_i}^2 = 10^{-3}$ olan rasgele süreçlerdir. Aranan parametre $\mathbf{w}_o \in \mathbb{R}^4$ da rasgele seçiliyor. Ağ üzerinde sinyalin gürültüye oranının 10'dan 100'e değişmesini amaçladığımız için bağlantım sinyallerini yukarıdaki yöntemle seçiyoruz. İzdüşümü operatörleri de sıfır ortalamalı, Gauss dağılımına sahip, varyansı $\sigma_{c_i}^2 = 1$ olan rasgele vektör süreçleridir.

Yayınım olmaması yapılanışını yayının uygulaması içerisinde birleşim matrisini birim matris seçerek oluşturuyoruz. Yayınım yapılanışları için Metropolis birleşim kuralını kullanıyoruz, şöyle ki:

$$\gamma_{i,j} = \begin{cases} \frac{\alpha}{\max\{n_i, n_j\}} & \text{if } j \in \mathcal{N}_i \setminus i, \\ 0 & \text{if } j \notin \mathcal{N}_i, \\ 1 - \sum_{j \in \mathcal{N}_i \setminus i} \gamma_{i,j} & \text{if } i = j, \end{cases}$$

burada n_i ve n_j , i ve j boğumlarının komşu sayılarını belirtir. Tam yayının için $\alpha = 1$. Ancak skaler yayının yapılanışı içerisindeki $\mathbf{a}_{j,t}$ parametreleri orjinal parametre vektörleri kadar bilgi içermiyor. Bu yüzden $\alpha = 0, 1$ seçerek yerel kestirim parametresine daha fazla ağırlık veriyoruz. Kestirim algoritmalarında adım büyüklükleri şöyle seçiliyor: $\mu_i = 0, 042$ ve $\eta_i = 0, 25 \forall i$.



Şekil 1: Yayınım yokken, skaler yayının ve tam yayının varkenki yapılanışlarda algoritmaların ortalama kare sapma performanslarının karşılaştırılması.

Birbirinden bağımsız şekilde gerçekleştirdiğimiz 200 ayrı deneyin sonuçlarının ortalamasını alarak Şekil 1'de yayının olmadığı, skaler yayının ve tam yayının olduğu yapılanışların evrensel ortalama kare sapma (MSD) eğrilerini karşılaştırıyoruz. Burada $MSD = E\|\tilde{\phi}_t\|^2$ belirtmektedir. Bu şekilde teorik sonuçların ve deney sonuçlarının birbirleriyle eşleştiğini görüyoruz. Ayrıca teorik sonuçlar sürekli rejimde evrensel MSD'nin $-47.1dB$ olacağını söylüyor. Bu sonuçta deney sonuçlarıyla eşleşmektedir. Son olarak skaler yayının stratejisi tam yayının stratejisinin performansına benzer bir performans yakalarken iletişim yükünü % 75 azaltmıştır.

V. SONUÇ

Bu bildiri de skaler yayının stratejisinin geçici ve sürekli rejim analizlerini sunuyoruz. Performans analizlerinin deney sonuçlarıyla birebir eşleştiğini gösteriyoruz. Sonuç olarak skaler yayının stratejisi tam yayının stratejisi ile karşılaştırılabilir performans elde ederken iletişim yükünü ciddi anlamda azaltıyor.

KAYNAKÇA

- [1] A. H. Sayed, S.-Y. Tu, J. Chen, X. Zhao, and Z. J. Towfic, "Diffusion strategies for adaptation and learning over networks: an examination of distributed strategies and network behavior," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 30, no. 3, pp. 155-171, 2013.
- [2] C. G. Lopes and A. H. Sayed, "Diffusion least-mean-squares over adaptive network," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 7, pp. 3122-3136, 2008.
- [3] S. Werner, Y.-F. Huang, M. L. R. Campos, and V. Koivunen, "Distributed parameter estimation with selective cooperation," in *Proc. Int. Conf., Acoust., Speech, and Signal Process. (ICASSP)*, pp. 2849-2852, April 2009.
- [4] S. Xie and H. Li, "Distributed LMS estimation over networks with quantised communications," *International Journal of Control*, vol. 86, no. 3, pp. 478-492, 2013.
- [5] M. O. Sayin and S. S. Kozat, "Single bit and reduced dimension diffusion strategies over distributed networks," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 20, no. 10, pp. 976-979, 2013.
- [6] A. H. Sayed, *Fundamentals of Adaptive Filtering*, John Wiley and Sons, 2003.