INFOR: Information Systems and Operational Research

ISSN: 0315-5986 (Print) 1916-0615 (Online) Journal homepage: http://www.tandfonline.com/loi/tinf20

Sur l'allocation dynamique de portefeuille robuste contre l'incertitude des rendements moyens

Mustafa Ç. Pınar

To cite this article: Mustafa Ç. Pınar (2014) Sur l'allocation dynamique de portefeuille robuste contre l'incertitude des rendements moyens, INFOR: Information Systems and Operational Research, 52:1, 14-19, DOI: 10.3138/infor.52.1.14

To link to this article: https://doi.org/10.3138/infor.52.1.14

INFOR, Vol. 52, No. 1, February 2014, pp. 14–19
ISSN 0315-5986 | EISSN 1916-0615

Sur l'allocation dynamique de portefeuille robuste contre l'incertitude des rendements moyens

Mustafa Ç. Pınar
Department of Industrial Engineering Bilkent University 06800 Bilkent, Ankara, Turquie,
e-mail: mustafap@bilkent.edu.tr

Résumé—On considère le problème d'allocation dynamique de portefeuille à temps discret d'un investisseur sensible au risque et à l'incertitude sur les rendements moyens dans un marché composé de $n+1$ titres dont le dernier est sans risque pendant que les valeurs des n premiers évoluent selon la loi normale indépendamment pour toute date $t = 1, \ldots, T$. Le vecteur des rendements moyens est supposé inclus dans un ensemble d'incertitude ellipsoïdal dont le volume dépend d'un paramètre positif ε choisi par l'investisseur. Utilisant le concept de Robustesse Ajustable on obtient une stratégie dynamique optimale de portefeuille d'une simplicité remarquable et qui s'avère être une stratégie intertemporelle partiellement myope. Le résultat est valable à condition que la valeur du paramètre ε réglant l'ellipsoïde soit inférieur au rapport maximum de Sharpe du marché.

Abstract—In an economy with a negative exponential utility investor facing a set of risky assets with normally distributed returns over multiple periods, we consider the problem of making an ambiguity-robust dynamic portfolio choice when the expected return information is uncertain. We pose the problem in the Adjustable Robust Optimization framework under ellipsoidal representation of the expected return uncertainty, and provide a closed-form solution in the form of a simple, dynamic, partially myopic portfolio policy. The result provides a guideline in the form of an upper bound for the choice of the parameter controlling the aversion to ambiguity.

1. GÉNÉRALITÉS

Le problème est désormais classique. On étudie en temps discret le problème d'allocation optimale de portefeuille dynamique dans un marché d'actifs. Il a été l'objet d'un nombre considérable d'études depuis les années 1950; voir par exemple (Best, 1999; Demange et Rochet, 2005; Ingersol, 1987; Markowitz, 1959; Ross, 1999) pour ne citer que quelques ouvrages majeurs dans le domaine, et leurs listes de références. Plus récemment, une étude du problème du point de vue "robustesse" a été entamée en tenant compte des erreurs d'estimation inévitables concernant les paramètres majeurs du problème: e.g., les rentabilités moyennes et la matrice de covariance; voir les travaux (Ben-Tal and Nemirovski, 1998, 1999; Ben-Tal et al., 2002, Ben-Tal and Nemirovski, 2001). Il avait été établi plus tôt (Best and Grauer, 1991a, b) que les positions de portefeuille optimales peuvent être surtout très sensibles aux erreurs d'estimation sur les rentabilités moyennes. C'est cette sensibilité aux imprécisions sur les rentabilités que l'optimisation robuste prétend corriger en précisant un ensemble d'incertitude pour les paramètres sujets aux errors.

Received February 2013; Revised March / July / September 2014; Accepted September 2014

L'objet du travail présenté ci-dessous est de traiter simultanément l'aversion au risque (provenant de la nature aléatoire des rendements) d'un investisseur capturée par une fonction d'utilité exponentielle négative de type CARA (Constant Absolute Risk Aversion, aversion absolue au risque constante) et l'aversion à l'incertitude sur les rentabilités moyennes. Les rentabilités des actifs risqués sont supposées suivre la loi normale de manière statistiquement indépendante, et dont les paramétres varient indépendamment selon la période. Bien qu'elles constituent de fortes hypothèses, la normalité et la fonction exponentielle négative d'utilité permettent d'obtenir une expression analytique de l'espérance d'utilité. En plus, les valeurs des rentabilités moyennes contre lesquelles l'optimisation se veut robuste sont restreintes à un ensemble ellipsoïdal d'incertitude dont les mérites ont été exposées de manière détaillée dans les écrits de Ben-Tal et Nemirovski, et les autres (Ben-Tal and Nemirovski, 1998, 1999; Ben-Tal et al., 2002; Ben-Tal and Nemirovski, 2001; Delage and Ye, 2010; Garlappi et al., 2007; Goldfarb and Iyengar, 2003). Par conséquent, le travail actuel se situe plutôt dans la lignée des recherches en optimisation stochastique robuste (El Ghaoui et al., 2003; Popescu, 2005). Le résultat principal de l'article consiste à donner une stratégie dynamique simple pour l'allocation optimale de portefeuille dans un cadre multi-période en utilisant la notion de "Robustesse Ajustable" (Ben-Tal et al., 2004; Bertsimas et al., 2010; Takeda et al., 2008) où les décisions optimales au lieu d'être prises une fois pour toute période future, sont différées jusqu'à la date où elles sont requises. La politique ajustable optimale dans le cas présent s'avère être une politique fixe prescrite au temps $t = 0$ et donc non-ajustée, grâce à l'indépendance de l'incertitude dans les rendements moyens d'une période à l'autre. Autrement dit, la politique ajustable optimale performe aussi bien qu'une politique non-ajustée lorsque l'incertitude est indépendante d'une période à l'autre. Elle a la propriété partiellement myope et se réduit à un résultat classique de (Mossin, 1968) si on ne tient pas compte de l'incertitude des rendements moyens.

2. LE MODÈLE

L'investisseur a accès à $n+1$ actifs dont le dernier est sans risque pendant que les processus des rendements (ou rentabilité) X_t des n premiers suivent la loi gaussienne avec un vecteur de rendements moyens $\mathbf{Y}_t$ et une matrice de covariance Σ_t supposée inversible pour tout $t = 1, \ldots, T$. On suppose que les rendements intertemporels X_t sont statistiquement indépendants. Le rendement de l'actif non risqué est constant et égal à $R_t \geq 1$ pour tout $t = 1, \ldots, T$.

L'investisseur dispose d'une richesse initiale W_0 qui sera répartie sur les $n+1$ actifs. On suppose que l'investisseur puisse, sans coûts de transaction, acheter ou vendre à découvert les $n+1$ titres disponibles sur le marché. Donc, les composantes du vecteur ω ne sont assujetties à aucune restriction de signe. On considère un cadre dynamique où les positions groupées dans le vecteur $\omega \in \mathbb{R}^n$ sont révisées en dates discrètes $t = 1, \ldots, T$. Par exemple, la richesse atteinte W_1 à la fin de la période $t = 1$ est une variable aléatoire définie comme suit:

$$W_1(\omega_1) = \omega_1^T \mathbf{X}_1 + [W_0 - \mathbf{1}^T \omega_1] R_1. \tag{1}$$

où $\omega_1 \in \mathbb{R}^n$ représente les investissements en actifs risqués en début de la période $t = 1$, et $W_0 - \mathbf{1}^T \omega_1$ le montant investi en actif non-risqué. En général on a donc

$$W_t(\omega_t) = \omega_t^T \mathbf{X}_t + [W_{t-1} - \mathbf{1}^T \omega_t] R_t, \tag{2}$$

pour tout $t = 1, \ldots, T$.

On suppose que les préférences de l'investisseur sont représentées par l'espérance mathématique d'une fonction d'utilité CARA, c'est-à-dire, une fonction exponentielle négative d'utilité caracterisée par une constante positive α représentant le degré d'aversion au risque de l'individu:

$$\mathbb{E}[- \mathrm{e}^{-\alpha W(\omega)}]$$

pour une richesse quelconque $W(\omega)$.

Le rendement moyen $\mathbf{Y}_t$ est supposé prendre ses valeurs dans un ellipsoïde défini comme suit:

$$U_X^t = \{\mathbf{Y} \,|\, \|\Sigma^{-1/2}(\mathbf{Y} - \bar{\mathbf{X}}_t)\|_2 \leq \sqrt{\varepsilon_t}\},$$

où le centre $\bar{\mathbf{X}}_t$ représente un vecteur de valeurs estimées pour les rentabilités moyennes et ε_t est une constante positive qui reflète la confiance de l'investisseur en cette valeur estimée, pour tout $t = 1, \ldots, T$. On introduit la fonction modifiée tenant compte de l'aversion à l'incertitude sur les rendements moyens:

$$\min_{\mathbf{Y} \in U_X} \mathbb{E}[- \mathrm{e}^{-\alpha W(\omega)}].$$

Dans un cadre statique en négligeant l'indice t indiquant la date, l'investisseur d'aversion au risque α et d'aversion à l'incertitude ε aurait intérêt à choisir son allocation de portefeuille en résolvant le problème suivant:

$$\max_{\omega} \left\{ \min_{\mathbf{Y} \in U_X} \mathbb{E}[- \mathrm{e}^{-\alpha W(\omega))}] \right\}, \tag{3}$$

d'où résulte un portefeuille *robuste* contre toute réalisation des rendements moyens dans l'ensemble d'incertitude ellipsoïdal U_X.

3. LE PROBLÈME DYNAMIQUE

On pose le problème dynamique dans le cadre de la Robustesse Ajustable (Ben-Tal et al., 2004; Takeda et al., 2008). Le processus de décision se déroule de la façon suivante. Le but de l'investisseur est de maximiser l'espérance d'utilité, robuste contre l'incertitude des rendements moyens, de la richesse atteinte à la fin de l'horizon d'investissement, c'est-à-dire la fin de la période T. Ayant une richesse initiale W_0 en début de la période $t = 1$, l'investisseur effectue une sélection optimale de portefeuille. Le temps ayant evolué et les rendements des actifs durant la période $t = 1$ ayant été réalisés, en début de la période $t = 2$ l'investisseur serait en possession d'une richesse $\tilde{W}_1$ qui n'est plus une grandeur aléatoire (pour distinguer de W_1 qui est aléatoire en début de $t = 1$). Alors, l'investisseur ferait son choix de portefeuille encore une fois tenant compte de la nature aléatoire des rendements et de l'incertitude des rentabilités moyennes concernant la période $t = 2$. Le processus, qui se répète ainsi, en chaque début de période, se termine, une fois atteinte la fin de la période $t = T$.

Suivant les références primaires (Ben-Tal et al., 2004; Takeda et al., 2008) on se propose donc de résoudre le problème suivant:

$$V_T = \max_{\omega_T} \min_{\mathbf{Y}_T \in U_X^T} \mathbb{E}_{T-1}[- \mathrm{e}^{-\alpha W_T(\omega_T)}] \tag{4}$$

$$V_{T-1} = \max_{\omega_{T-1}} \min_{\mathbf{Y}_{T-1} \in U_X^{T-1}} \mathbb{E}_{T-2}[V_T], \tag{5}$$

$$\vdots$$

$$V_1 = \max_{\omega_1} \min_{\mathbf{Y}_1 \in U_X^1} \mathbb{E}[V_2], \tag{6}$$

où la notation $\mathbb{E}_t$ représente l'espérance conditionnelle par rapport à l'information disponible en fin de période t, et V_t indique la valeur optimale pour la période t que l'investisseur aborde avec une richesse initiale $\tilde{W}_{t-1}$ qui est connu en début de

INFOR, Vol. 52, No. 1, February 2014, pp. 14–19
ISSN 0315-5986 | EISSN 1916-0615
DOI 10.3138/infor.52.1.14

la période t. Par contre à l'instant où débute la période $t-1$, W_t est une variable aléatoire. Avant de s'attaquer au problème dynamique il sera utile de résoudre de manière explicite le problème statique.

Théorème 1. *Le choix optimal de portefeuille d'un investisseur CARA d'aversion au risque α et d'aversion à l'incertitude ε résolvant le programme (3) est donné par*

$$\omega^* = \begin{cases} (\frac{\sqrt{H}-\sqrt{\varepsilon}}{\alpha\sqrt{H}})\Sigma^{-1}\bar{\mu} & si\, H > \varepsilon \\ 0 & si\, H \leq \varepsilon \end{cases} \tag{7}$$

où $H = \bar{\mu}^T\Sigma^{-1}\bar{\mu}$ et $\bar{\mu} = \bar{\mathbf{X}} - R\mathbf{1}$.

Démonstration. On traite d'abord le problème

$$\min_{\mathbf{Y}\in U_X} \mathbb{E}[-\mathrm{e}^{-\alpha W(\omega))}]$$

En raison de la normalité des rendements X la richesse $W(\omega)$ suit une loi normale d'espérance $\omega^T\mathbf{Y} - R\omega^T\mathbf{1}+W_0R$ et de variance $\omega^T\Sigma\omega$. Étant donné que la variable aléatoire $\mathrm{e}^{-\alpha W(\omega)}$ suit une loi log-normale d'espérance $\exp\{-\alpha(\omega^T\mathbf{Y} - R\omega^T\mathbf{1}+W_0R)+\frac{1}{2}\alpha^2\omega^T\Sigma\omega\}$ on a le problème suivant a résoudre:

$$\min_{\mathbf{Y}\in U_X} -\mathrm{e}^{-\alpha[\omega^T\mathbf{Y}-R\omega^T\mathbf{1}-\frac{\alpha}{2}\omega^T\Sigma\omega+W_0R]}. \tag{8}$$

Le problème (8) équivaut alors à la maximisation de l'exposant sous contrainte d'inclusion dans U_X. À la suite d'une simple application des conditions d'optimalité Karush-Kuhn-Tucker (le problème est convexe, la condition de Slater est satisfaite) on obtient:

$$\min_{\mathbf{Y}\in U_X} \mathbb{E}[-\mathrm{e}^{-\alpha W(\omega))}] =- \mathrm{e}^{-\alpha[\omega^T\bar{\mathbf{X}}-R\omega^T\mathbf{1}-\frac{\alpha}{2}\omega^T\Sigma\omega-\sqrt{\varepsilon\omega^T\Sigma\omega}+W_0R]}. \tag{9}$$

La dérivation du problème (9) se résume de la façon suivante. Pour résoudre (8) il suffit de résoudre le problème (en supposant un vecteur ω non nul car autrement le problème serait sans intérêt)

$$\min_Y \omega^T Y$$

sous la contrainte:

$$(Y-\bar{\mathbf{X}})^T\Sigma^{-1}(Y-\bar{\mathbf{X}}) \leq \varepsilon. \tag{10}$$

Il découle des conditions d'optimalité de premier ordre que toute solution optimale Y^* possède la forme:

$$Y^* = \bar{\mathbf{X}} - \frac{1}{\lambda}\Sigma\omega$$

où λ est supposé être un multiplicateur positif. Donc, la contrainte (10) est active pour satisfaire à la condition des écarts complémentaires, et on obtient $\lambda = \sqrt{\frac{\omega^T\Sigma\omega}{\varepsilon}}$, d'où résulte la valeur optimale $\omega^T\bar{\mathbf{X}} - \sqrt{\varepsilon\omega^T\Sigma\omega}$. On a donc transformé le problème de départ au programme suivant:

$$\max_\omega -\mathrm{e}^{-\alpha[\omega^T\bar{\mathbf{X}}-R\omega^T\mathbf{1}-\frac{\alpha}{2}\omega^T\Sigma\omega-\sqrt{\varepsilon\omega^T\Sigma\omega}+W_0R]}. \tag{11}$$

La résolution du problème (11) équivaut à la maximisation de la fonction

$$\bar{\mu}^T\omega - \frac{\alpha}{2}\omega^T\Sigma\omega - \sqrt{\varepsilon\omega^T\Sigma\omega},$$

qui est une fonction concave des positions ω (où on a introduit $\bar{\mu} = \bar{\mathbf{X}} - R\mathbf{1}$, le vecteur des *rendements moyens excédentaires*). En supposant que l'expression sous la racine carrée soit positive (ce qui revient à supposer l'existence d'une solution ω^* non nulle) les conditions d'optimalité qui s'écrivent comme suit

$$\bar{\mu} - \alpha\Sigma\omega - \sqrt{\varepsilon}\frac{\Sigma\omega}{\sqrt{\omega^T\Sigma\omega}} = 0,$$

sont à la fois nécessaires et suffisantes. On résout ce système non-linéaire de la manière suivante: on pose $\sigma = \sqrt{\omega^T\Sigma\omega}$ et en résolvant ainsi les conditions d'optimalité on obtient

$$\omega^* = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\varepsilon}+\alpha\sigma}\right)\Sigma^{-1}\bar{\mu}. \tag{12}$$

On traite ensuite l'équation $\sigma^2 = \omega^{*T}\Sigma\omega^*$ qui donne lieu à l'équation quadratique suivante:

$$\alpha^2\sigma^2 + 2\sqrt{\varepsilon}\alpha\sigma - H + \varepsilon = 0$$

où on définit $H = \bar{\mu}^T\Sigma^{-1}\bar{\mu}$. La racine positive de l'équation est donnée par

$$\sigma_+ = \frac{-\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{H}}{\alpha},$$

pourvu qu'on ait $H > \varepsilon$. En remplaçant σ_+ dans l'expression (12) pour ω^*, on obtient la formule énoncée. Dans le cas où $H \leq \varepsilon$, on n'a pas de racine réelle positive, ce qui implique qu'une solution ω^* non nulle est impossible. □

On est prêt à analyser le problème dynamique à l'envers.

Théorème 2. *La stratégie optimale de portefeuille dynamique d'un investisseur d'aversion au risque α et d'aversion à l'incertitude ε_t, $t = 1, \ldots, T$, résolvant le programme dynamique (4)–(5)–(6) est donnée par*

$$\omega_t^* = \frac{\sqrt{H_t}-\sqrt{\varepsilon_t}}{\alpha(\prod_{j=t+1}^T R_j)\sqrt{H_t}}\Sigma_t^{-1}\bar{\mu}_t, \quad t = 1, \ldots, T, \tag{13}$$

où $\bar{\mu}_t = \bar{\mathbf{X}}_t - R_t\mathbf{1}$, à condition de préciser $\varepsilon_t < H_t$ pour $t = 1, \ldots, T$.

Démonstration. En procédant à rebours on commence par la derniére date, à savoir, le programme

$$\max_{\omega_T} -\mathrm{e}^{-\alpha[\omega_T^T\bar{\mathbf{X}}_T-R_T\omega_T^T\mathbf{1}-\frac{\alpha}{2}\omega_T^T\Sigma_T\omega_T-\sqrt{\varepsilon_T\omega_T^T\Sigma_T\omega_T}+W_{T-1}R_T]}. \tag{14}$$

Utilisant le résultat précédent, la solution ω_T^* est

$$\omega_T^* = \left(\frac{\sqrt{H_T}-\sqrt{\varepsilon_T}}{\alpha\sqrt{H_T}}\right)\Sigma_T^{-1}\bar{\mu}_T \tag{15}$$

où on définit $H_T = \bar{\mu}_T^T\Sigma_T^{-1}\bar{\mu}_T$ et $\bar{\mu}_T = \bar{\mathbf{X}}_T - R_T\mathbf{1}$ sous condition d'avoir $H_T > \varepsilon_T$. Il en résulte l'expression

DOI 10.3138/infor.52.1.14

$$V_T = -\,\mathrm{e}^{-\alpha[(\gamma-\frac{\alpha}{2}\gamma^2)H_T-\sqrt{\varepsilon_T H_T}+W_{T-1}R_T]},$$

où on définit $\gamma = \frac{\sqrt{\varepsilon_T+H_T}-\sqrt{\varepsilon_T}}{\alpha\sqrt{\varepsilon_t+H_T}}$ afin de faciliter la lecture. Passant à la date $T-1$ on a à calculer V_{T-1}:

$$V_{T-1} = \max_{\omega_{T-1}} \min_{\mathbf{Y}_{T-1}\in U_X^{T-1}} \mathbb{E}_{T-1}\big[-\,\mathrm{e}^{-\alpha[(\gamma-\frac{\alpha}{2}\gamma^2)H_T-\sqrt{\varepsilon_T H_T}+W_{T-1}R_T]}\big]$$

où on a $W_{T-1} = \omega_{T-1}^T X_{T-1} + [W_{T-2} - \mathbf{1}^T\omega_{T-1}]R_{T-1}$. On doit donc résoudre le programme

$$\max_{\omega_{T-1}} -\,\mathrm{e}^{-\alpha\kappa}\mathrm{e}^{-\alpha R_T[\omega_{T-1}^T\bar{\mathbf{X}}_{T-1}-R_{T-1}\omega_{T-1}^T\mathbf{1}-\frac{\alpha R_T}{2}\omega_{T-1}^T\Sigma_{T-1}\omega_{T-1}} \\ -\sqrt{\varepsilon_{T-1}\omega_{T-1}^T\Sigma_{T-1}\omega_{T-1}}+W_{T-2}R_{T-1}]$$

où on a défini $\kappa = (\gamma - \frac{\alpha}{2}\gamma^2)H_T - \sqrt{\varepsilon_T H_T}$. En utilisant une seconde fois le théorème précédent on obtient ω_{T-1}^* sous l'hypothèse $H_{T-1} > \varepsilon_{T-1}$:

$$\omega_{T-1}^* = \left(\frac{\sqrt{H_{T-1}}-\sqrt{\varepsilon_{T-1}}}{\alpha R_T\sqrt{H_{T-1}}}\right)\Sigma_{T-1}^{-1}\bar{\mu}_{T-1}.$$

En continuant de cette façon, on arrive au problème général pour la date t qui consiste à résoudre le programme suivant

$$\max_{\omega_t} -K_t\mathrm{e}^{-\alpha\prod_{j=t+1}^T R_j[\omega_t^T\bar{\mathbf{X}}_t-R_t\omega_1^T\mathbf{1}-\frac{\alpha\prod_{j=t+1}^T R_j}{2}\omega_t^T\Sigma_t\omega_t-\sqrt{\varepsilon_t\omega_t^T\Sigma_t\omega_t}+W_{t-1}R_t]} \tag{16}$$

où on définit la constante K_t qui est sans intérêt pour la solution. On termine la démonstration en évoquant le Théorème 1. □

La stratégie dynamique optimale (13) possède les propriétés suivantes:

1. L'investisseur suivant la stratégie optimale applique en effet une règle *partiellement myope* (Bertsekas, 1976) qui consiste à pratiquer un choix optimal robuste de portefeuille en date t pour la période courante comme si la richesse résultante W_t en fin de date serait réinvestie dans l'actif sans risque pour toute période ultérieure. Par conséquent le problème résolu par l'investisseur en date t équivaut en fait à

$$\max_{\omega_t} \min_{\mathbf{Y}_t\in U_X^t} \mathbb{E}\big[-K_t e^{-\alpha(\prod_{j=t+1}^T R_j)W(\omega_t)}\big]$$

   où on a $W(\omega_t) = \omega_t^T\mathbf{X}_t + [W_{t-1} - \mathbf{1}^T\omega_t]R_t$, un programme d'où découle en effet le programme (16).

2. Si on substitue $\varepsilon_t = 0$ partout dans la régle optimale pour tout t on obtient

$$\omega_t^* = \frac{1}{\alpha(\prod_{j=t+1}^T R_j)}\Sigma_t^{-1}\bar{\mu}_t,\ t = 1,\ldots,T$$

   ce qui est un résultat classique datant de 1968, à savoir la stratégie dynamique optimale de J. Mossin (Bertsekas, 1976; Mossin, 1968) obtenue sans tenir compte de l'aversion à l'incertitude des rendements moyens.

3. La règle de gestion robuste optimale obtenue dans Théorème 2 ne dépend pas directement des observations faites des rendements des périodes précédentes. Par conséquent, la règle dynamique (13) est une règle fixe d'investissements pré-spécifiés au temps $t = 0$, et jamais remise en question. Ce sont la propriété d'indépendance des rendements intertemporels $X_1, X_2, \ldots, X_{t-1}$ et le fait que la règle optimale statique n'est pas liée à la richesse initiale (une propriété de la fonction d'utilité exponentielle) qui permettent la simplification à une forme analytique déjà lorsqu'il n'y a pas d'incertitude vis-à-vis de la moyenne des rendements et lorsqu'il y a incertitude vis-à-vis de cette moyenne tel que rapporté dans l'article présent.

4. Un résultat semblable au Théorème 2 est décrit dans (Chen et al., 2011) pour un problème de gestion dynamique de portefeuille dans le contexte d'une mesure de risque appelée "second order lower partial moment" (second moment partiel inférieur). La distribution des rendements aléatoires est supposée inconnue sauf le vecteur des rendements moyens et la matrice de covariance. Les auteurs donnent une expression analytique pour la valeur maximale de l'espérance mathématique de la mesure de risque sur l'ensemble des distributions ayant une moyenne et une variance fixes. Le résultat génère une règle de gestion de portefeuille qui s'adapte aux observations et tient compte de l'incertitude par rapport au choix de distribution. D'un autre côté, les auteurs de (Chen et al., 2011) n'obtiennent pas de forme analytique lorsque la moyenne reste inconnue; ils notent simplement que la règle peut être obtenue facilement de manière numérique.

5. La solution statique (7) est un portefeuille MV-efficace selon la théorie Moyenne-Variance (Markowitz, 1959). En outre, on obtient en mettant ε égal à zéro la solution classique

$$\omega_M = \frac{1}{\alpha}\Sigma^{-1}(\bar{\mathbf{X}} - R\mathbf{1}). \tag{17}$$

   qui résout le programme

$$\max_{\omega} \mathbb{E}[-\,\mathrm{e}^{-\alpha W(\omega)}]. \tag{18}$$

   D'autre part, quand ε tend vers H, ω^* tend vers l'origine, un portefeuille qui place toute la richesse dans l'actif non risqué.

6. Le facteur $\sqrt{H}$ qui constitue une limite supérieure pour le degré d'aversion à l'incertitude $\sqrt{\varepsilon}$ est connu dans le cadre de la théorie Moyenne-Variance comme le coefficient directeur de la droite de marché; (Best, 2010). Il est en même temps égal au ratio maximum de Sharpe qui se révèle être la valeur optimale du programme

ISSN 0315-5986 | EISSN 1916-0615
DOI 10.3138/infor.52.1.14

$$\max_{\omega} \frac{\bar{\mu}^T \omega}{\sqrt{\bar{\mu}^T \Sigma \bar{\mu}}}.$$

La version robuste à l'incertitude sur les rendements du problème ci-dessus est le programme suivant:

$$\max_{\omega} \frac{\bar{\mu}^T \omega - \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\bar{\mu}^T \Sigma \bar{\mu}}}{\sqrt{\bar{\mu}^T \Sigma \bar{\mu}}},$$

qui a $\sqrt{H} - \sqrt{\varepsilon}$ comme valeur optimale. Cette observation signifie que l'investisseur sensible à l'incertitude avec un paramètre ε perçoit une droite de marché moins inclinée dotée d'une pente $\sqrt{H} - \sqrt{\varepsilon}$, ce qui implique qu'il évitera de placer dans les actifs risqués au cas où on aurait $\sqrt{\varepsilon} \geq \sqrt{H}$.

7. En l'absence d'un actif non risqué on a le problème statique

$$\max_{\omega}\{\min_{\mathbf{Y}\in U_X} \mathbb{E}[- \mathrm{e}^{-\alpha\omega^T \mathbf{X}}]\} \tag{19}$$

sous la contrainte $\mathbf{1}^T\omega = W_0$. La résolution du programme (19) dans le cas Moyenne-Variance (c'est-à-dire sans fonction d'utilité exponentielle) a été étudiée dans (Garlappi et al., 2007). Il en résulte la règle suivante

$$\omega^* = \frac{1}{\alpha + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sigma}} \Sigma^{-1}\left[\bar{\mathbf{X}} + \frac{W_0(\alpha\sigma + \sqrt{\varepsilon}) - \sigma B}{\sigma A}\mathbf{1}\right],$$

où σ est une racine de l'équation polynomiale de quatrième degré

$$\sigma^2 = \frac{1}{(\alpha + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sigma})^2}\left[C + 2B\frac{W_0(\alpha\sigma + \sqrt{\varepsilon}) - \sigma B}{\sigma A} + \left(\frac{W_0(\alpha\sigma + \sqrt{\varepsilon}) - \sigma B}{\sigma A}\right)^2 A\right]$$

où on a défini $A = \mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\mathbf{1}$, $B = \mathbf{1}^T\Sigma^{-1}\bar{\mathbf{X}}$, $C = \bar{\mathbf{X}}^T\Sigma^{-1}\bar{\mathbf{X}}$. Garlappi et al. (Garlappi et al., 2007) ont établi l'existence d'une racine positive qui doit être calculée numériquement. Donc, une règle dynamique explicite est hors de portée.

8. On pourrait aussi traiter le problème dynamique dans le cadre Moyenne-Variance. Pour le cas $T = 2$ on a

$$V_2 = \max_{\omega_2} \min_{\mathbf{Y}_2\in U_X^2} \mathbf{Y}_2^T\omega_2 - \rho\omega_2^T\Sigma_2\omega_2 + (W_1 - \mathbf{1}^T\omega_2)R,$$

avec un paramètre positif ρ. La composition optimale de portefeuille ω_2^* est déduite encore une fois du Theorème 1:

$$\omega_2^* = \left(\frac{\sqrt{H_2} - \sqrt{\varepsilon}}{\rho\sqrt{H_2}}\right)\Sigma_2^{-1}\bar{\mu}_2. \tag{20}$$

Passant ensuite au calcul de V_1 dans le programme suivant

$$V_1 = \max_{\omega_1} \min_{\mathbf{Y}_1\in U_X^1} V_{2,}$$

on arrive à un programme conique n'admettant pas de solution explicite. Il faut alors avoir recours à un logiciel approprié.

En guise de conclusion, on termine par un récapitulatif des hypothèses du modèle:

1. Les rendements des n actifs risqués sont supposés suivre la loi normale, indépendamment pour chaque période d'investissement
2. L'investisseur possède une fonction d'utilité exponentielle négative (d'aversion absolue au risque constante)
3. Il est permis à l'investisseur de former des portefeuilles sans coûts de transaction et où des positions à découvert sont permises
4. L'incertitude des rentabilités moyennes est modélisée au moyen d'un ensemble ellipsoïdal.

C'est précisément l'ensemble de ces hypothèses qui assure que le modèle de l'article aboutisse à une solution analytique. Il est néanmoins clair que chacune des hypothèses ci-dessus ferait l'objet des critiques sérieuses dans les milieux académiques. Toutefois, le résultat de l'article justifie par sa simplicité l'adoption de ces fortes hypothèses. D'autre part, un résultat analytique du modèle obtenu à la suite de l'affaiblissement (ou la modification) d'une hypothèse quelconque serait une avancée future importante.

RÉFÉRENCES

Ben-Tal, A. and Nemirovski, A. (1999), "Robust solutions to uncertain linear programming problems," *Operations Research Letters*, 25: 1–13.

Ben-Tal, A. and Nemirovski, A. (1998), "Robust convex optimization," *Mathematics of Operations Research*, 23: 769–805.

Ben-Tal, A., Margalit, T., and Nemirovski, A. (2002), "Robust modeling of multi-stage portfolio problems," In Frenk, H., Roos, K., Terlaky, T., and Zhang, S. (eds), High Performance Optimization, Kluwer Academic Publishers, New York, pp. 303–328.

Ben-Tal, A. and Nemirovski, A. (2001), Lectures on Modern Convex Optimization, SIAM-MPS Series on Optimization.

Ben-Tal, A., Goryashko, A., Guslitzer, E., and Nemirovski, A. (2004), "Adjustable Robust Solutions to Uncertain Linear Programs," *Mathematical Programming* 99: 351–376.

Bertsekas, D. P. (1976), Dynamic Programming and Stochastic Control, Academic Press, New York.

Bertsimas, D., Iancu, D. A., and Parrilo, P. A. (2010), "Optimality of affine policies in multistage robust optimization," *Mathematics of Operations Research*, 35: 363–394.

Best, M. J. and Grauer, R.R. (1991a), "Sensitivity analysis for mean-variance portfolio problems," *Management Science*, 37: 980–989.

Best, M. J. and Grauer, R. R. (1991b), "On the sensitivity of mean-variance-efficient portfolios to changes in asset means: some analytical and computational results," *The Review of Financial Studies*, 4: 315–342.

Best, M. J. (2010), Portfolio Optimization, Chapman & Hall/CRC, Financial Mathematics Series, Boca Raton.

Chen, L., He, S., and Zhang, S. (2011), "Tight bounds for some risk measures, with applications to robust portfolio selection," *Operations Research*, 59: 847–865.

INFOR, Vol. 52, No. 1, February 2014, pp. 14–19
ISSN 0315-5986 | EISSN 1916-0615
DOI 10.3138/infor.52.1.14

Delage, E. and Ye, Y. (2010), "Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems," *Operations Research*, 58: 596–612.

Demange, G. and Rochet, J.-C. (2005), Méthodes Mathématiques de la Finance, 3[e] édition, Economica, Paris.

El Ghaoui, L., Oks, M., and Oustry, F. (2003), "Worst-case Value-at-Risk and robust portfolio optimization: a conic programming approach," *Operations Research* 51: 543–556.

Garlappi, L., Uppal, R., and Wang, T. (2007), "Portfolio selection with parameter and model uncertainty: a multi-prior approach," *Review of Financial Studies*, 20: 41–81.

Goldfarb, D. and Iyengar, G. (2003), "Robust portfolio selection problems," *Mathematics of Operations Research*, 28: 1–38.

Ingersoll, J. (1987), Theory of Financial Decision Making, Rowman-Littlefield, Maryland.

Markovitz, H. (1959), Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment, Wiley, New York.

Mossin, J. (1968), "Optimal multi-period portfolio policies," *Journal of Business*, 41: 215–229.

Popescu, I. (2005), "Robust mean-covariance solutions for stochastic optimization," *Operations Research*, 55(1): 98–112.

Ross, S. (1999), An Introduction to Mathematical Finance: Options and Other Topics, Cambridge University Press, Cambridge.

Takeda, A., Taguchi, S., and Tütüncü, R. (2008), "Adjustable robust optimization models for a non-linear two-period system," *Journal of Optimization Theory and Applications*, 136: 275–295.

INFOR, Vol. 52, No. 1, February 2014, pp. 14–19
ISSN 0315-5986 | EISSN 1916-0615
DOI 10.3138/infor.52.1.14