

Non-oscillating Paley–Wiener functions

Iossif OSTROVSKII^{a,b}, Alexander ULANOVSKII^c

^a Department of Mathematics, Bilkent University, 06533 Bilkent, Ankara, Turkey

^b Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering, 61103 Kharkov, Ukraine

^c Stavanger University College, P.O. Box 2557, Ullandhaug, 4091 Stavanger, Norway

E-mail: iossif@fen.bilkent.edu.tr; ostrovskii@ilt.kharkov.ua; Alexander.Ulanovskii@tn.his.no

(Reçu le 8 septembre 2001, accepté le 13 septembre 2001)

Résumé.

A non-oscillating Paley–Wiener function is a real entire function f of exponential type belonging to $L_2(\mathbb{R})$ and such that each derivative $f^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, has only a finite number of real zeros. We show that the class of such functions is non-empty and contains functions of arbitrarily fast decay on \mathbb{R} allowed by the convergence of the logarithmic integral. We also give a close to the best possible asymptotic (as $n \rightarrow \infty$) estimate of the size of the smallest interval containing all real zeros of n -th derivative of a function f of the class. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Fonctions de Paley–Wiener non oscillantes

Résumé.

Une fonction entière réelle du type exponentiel appartenant à $L^2(\mathbb{R})$ est une fonction non oscillante de Paley–Wiener si chacune de ses dérivées $f^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, possède un nombre fini de zéros. Nous montrons que la classe de ces fonctions n'est pas vide. De plus, elle contient des fonctions qui décroissent arbitrairement vite, à condition que la vitesse de décroissance n'interdise pas la convergence de l'intégrale logarithmique. Nous établissons aussi une estimation de la longueur de l'intervalle minimal contenant tous les zéros réels de la n -ième dérivée d'une fonction de cette classe. D'un certain point de vue, cette estimation est optimale. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Version française abrégée

Une fonction entière f du type exponentiel s'appelle *fonction de Paley–Wiener (PW-fonction)* si $f \in L^2(\mathbb{R})$. Une PW-fonction est dite *réelle* si $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Des propriétés d'oscillation de PW-fonctions réelles ont été étudiées dans plusieurs travaux (voir [1,2,5] par exemple).

Le théorème classique de Shannon affirme que toute PW-fonction peut être décomposée en une série cardinale. Cette décomposition suggère qu'une PW-fonction réelle doit avoir un nombre infini de zéros réels. Néanmoins [2], il n'est pas difficile de montrer que les fonctions de ce même type peuvent être positives sur \mathbb{R} . Higgins [2] (voir aussi [1], p. 167) a posé la question suivante : est-il vrai qu'une dérivée

Note présentée par Jean-Pierre KAHANE.

de chaque PW-fonction réelle ait un nombre infini de zéros réels ? Une réponse positive a été obtenue par Clunie et les autres [1] et par Walker [5] pour des sous-classes de PW-fonctions réelles.

Quoiqu'il en soit, il se trouve que la réponse à la question de Higgins est négative. Dans cette Note, nous construisons une classe assez large de PW-fonctions f réelles telles que toutes les dérivées $f^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, ont seulement un nombre fini de zéros réels. Nous appelons ces fonctions *non oscillantes*. Nous montrons qu'il n'y a pas de restriction sur la décroissance d'une fonction non oscillante sur \mathbb{R} , sauf la convergence de l'intégrale logarithmique (1). Notre théorème 1 (ci-dessous) montre que pour n'importe quel $\rho \in (0, 1)$ et n'importe quel $\sigma > 0$, il existe une PW-fonction non oscillante f dont le type est σ , telle que la valeur $|x|^\rho \log(1/|f(x)|)$, $x \in \mathbb{R}$, est séparée de zéro et de l'infini par des constantes positives pour tous les $|x|$ suffisamment grands.

Il est facile de voir (théorème de Rolle), que la n -ième dérivée d'une PW-fonction non oscillante a au moins n zéros. Il nous semble raisonnable de poser une question sur la longueur de l'intervalle minimal contenant tous les zéros réels de la dérivée $f^{(n)}$. Le théorème 2 (ci-dessous) donne une estimation asymptotique de la longueur de cet intervalle qui est exacte d'un certain point de vue.

Nous passons maintenant à des formulations complètes des théorèmes 1 et 2.

Rappelons qu'un ordre précisé est une fonction $\rho(r)$ lisse et positive sur \mathbb{R} telle que les conditions (2) sont satisfaites. Définissons la fonction $V(r)$ par (3); cette fonction est évidemment croissante pour tous les r suffisamment grands.

THÉORÈME 1. – Soit $\rho(r)$ un ordre précisé satisfaisant les conditions (4). Il existe une PW-fonction non oscillante f telle que la relation (5) est vraie, où C_1 et C_2 sont des constantes positives.

Soit f une PW-fonction non oscillante. Désignons par $[-r(n, f), r(n, f)]$ l'intervalle minimal contenant tous les zéros réels de $f^{(n)}$. Évidemment (théorème de Rolle), $r(n, f)$ est croissant par rapport à n .

THÉORÈME 2. – (i) Pour n'importe quel ordre précisé possédant la propriété (4) il existe une PW-fonction non oscillante qui satisfait la relation (6), où v est une fonction inverse à V , et C est une constante positive.

(ii) Une PW-fonction f non oscillante arbitraire du type 1 admet l'inégalité asymptotique (7).

L'assertion (i) implique que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe une PW-fonction non oscillante f telle que $r(n, f) = O(n^{1+\varepsilon})$, $n \rightarrow \infty$, est vrai. En effet, si nous prenons $\rho(r) = 1/(1 + \varepsilon/2)$, nous aurons $v(u) = u^{1+\varepsilon/2}$ et $v(Cn \log n) = O(n^{1+\varepsilon})$, $n \rightarrow \infty$. En particulier, de l'inégalité (7) il implique que l'estimation (6) est proche de l'estimation exacte.

Nous donnons les lemmes principaux et les étapes des démonstrations de ces théorèmes ci-dessous dans les paragraphes 3 et 4. Notons que le plus simple exemple d'une PW-fonction non oscillante est exprimé par la formule (10) où $h(z)$ est défini par l'équation (8).

1. Introduction

A Paley–Wiener function (PW-function) is an entire function f of exponential type such that $f \in L_2(\mathbb{R})$. We say that a PW-function f is real if $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Oscillatory properties of real PW-functions have been subject of investigation of a number of papers (*see*, for example, [1,2,5]). The classical Shannon sampling theorem states that each PW-function may be expanded in a cardinal series. The sampling procedure can lead to expectation that a real Paley–Wiener function will have infinitely many real zeros. In fact, [2] such a function may be positive on \mathbb{R} . Higgins [3] (*see* also [1], p. 167) has posed the question whether some derivative of any real PW-function has infinitely many real zeros. For some classes of real PW-functions it is indeed so (*see* Clunie et al. [1] and Walker [5]).

However, it turns out that the answer for Higgins' question is negative. In this Note we construct a wide class of real PW-functions f with the property that each derivative $f^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, has only finite

number of real zeros. We call functions with this property *non-oscillating*. We show that in a sense there is no restriction on the rate of decay of a non-oscillating PW-function f on \mathbb{R} except that the logarithmic integral must converge (which is true for any PW-function):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\log|f(x)|| (1+x^2)^{-1} dx < \infty. \tag{1}$$

Our Theorem 1 below implies that for any $\rho \in (0,1)$ and any $\sigma > 0$ there exists a non-oscillating PW-function f of type σ such that the value $|x|^\rho \log(1/|f(x)|)$ is bounded from below and above by positive constants for all sufficiently large $|x|$, $x \in \mathbb{R}$.

It is easy to see (Rolle’s theorem) that n -th derivative of a non-oscillating PW-function f has at least n real zeros. The question arises about the size of the smallest interval containing all real zeros of $f^{(n)}$. Our Theorem 2 below gives in a sense sharp asymptotic (as $n \rightarrow \infty$) estimate of the length of this interval.

2. Statement of results

Let us remind that a proximate order ([4], Chapter 1, Section 12) is a continuously differentiable positive function $\rho(r)$ on $[0, \infty)$ satisfying the conditions:

$$\exists \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) =: \rho \geq 0, \quad \exists \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\rho'(r)}{\rho(r)} r \log r = 0. \tag{2}$$

Set

$$V(r) := r^{\rho(r)}. \tag{3}$$

It follows from (2) that function V increases for sufficiently large r .

THEOREM 1. – *Let $\rho(r)$ be a proximate order such that*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho > 0 \quad \text{and} \quad \int_1^\infty V(r)r^{-2} dr < \infty. \tag{4}$$

There exists a non-oscillating PW-function f such that

$$C_1 < \frac{1}{V(|x|)} \log \frac{1}{|f(x)|} < C_2, \quad |x| > r_0, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{5}$$

where r_0, C_1 and C_2 are positive constants.

Let f be a non-oscillating PW-function. Denote by $[-r(n, f), r(n, f)]$ the smallest symmetric interval containing all real zeros of $f^{(n)}$. Evidently (Rolle’s theorem), $r(n, f)$ increases in n .

THEOREM 2. – (i) *For any proximate order $\rho(r)$ satisfying (4) there exists a non-oscillating PW-function f such that*

$$r(n, f) \leq v(Cn \log n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{6}$$

where v is the inverse function for V and C is a positive constant.

(ii) *For any non-oscillating PW-function f of type 1 the following asymptotic inequality holds*

$$r(n, f) \geq \frac{\pi}{2e} n(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty. \tag{7}$$

Observe that part (i) implies that for each $\varepsilon \in (0, 1)$ there exists a non-oscillating PW-function f such that $r(n, f) = O(n^{1+\varepsilon})$, $n \rightarrow \infty$. Indeed, if we take $\rho(r) = 1/(1 + \varepsilon/2)$, then $v(u) = u^{1+\varepsilon/2}$ and $v(Cn \log n) = O(n^{1+\varepsilon})$. Thus, by virtue of (7), estimate (6) is close to the best possible.

3. Sketch of the proof of Theorem 1

A simple example of non-oscillating PW-function can be constructed as follows. Set

$$h(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (z2^{-k})^{-1} \sin(z2^{-k}). \tag{8}$$

This is an entire function of exponential type such that $h(0) = 1$ and

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in \mathbb{R}}} x^m h^{(n)}(x) = 0, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \tag{9}$$

The function

$$f(z) = \frac{1 - h(z)}{z} \tag{10}$$

is evidently a real PW-function. Equality (9) implies that

$$\left(\frac{h(x)}{x}\right)^{(n)} = o(|x|^{-n-1}), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Therefore,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-n-1} (1 + o(1)), \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty, \quad x \in \mathbb{R},$$

so that $f^{(n)}$ has only finitely many real zeros. The proof of Theorem 1 is based on a similar construction which now makes use of several rather technical lemmas.

LEMMA 1. – Let $\rho(r)$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \rho \leq 1$ be a proximate order satisfying (4). Then there exists an entire function

$$g(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{c_k^2}\right), \quad 0 < c_1 < c_2 < \dots; \quad \sum_k c_k^{-2} < \infty,$$

which is positive on \mathbb{R} , real on $i\mathbb{R}$ and satisfies the conditions:

(i) the asymptotic equality holds

$$\log g(x) = \pi \operatorname{csc}\left(\frac{\pi\rho}{2}\right) V(|x|) + o(V(|x|)), \quad |x| \rightarrow \infty, \tag{11}$$

(ii) on every interval (c_k, c_{k+1}) there exists a point d_k , $k = 1, 2, \dots$, such that

$$\log|g(\pm i d_k)| = \pi \cot\left(\frac{\pi\rho}{2}\right) V(d_k) + o(V(d_k)), \quad d_k \rightarrow \infty. \tag{12}$$

LEMMA 2. – Suppose $\rho(r)$ is a proximate order satisfying (4). Then there exists an even real PW-function h with real zeros and such that

$$\log|h(x)| \leq -V(|x|) + O(1), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

LEMMA 3. – Suppose $\rho(r)$ is a proximate order, $q(z)$ is an entire function of completely regular growth with respect to $\rho(r)$. Assume that $q(z) \neq 0$ in $\{z : |\arg z| \leq \alpha < \pi\}$ and that the limit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{V(x)} \log|q(x)| \neq 0$$

exists. Then the derivative $q'(z)$ does not vanish in $\{z : |\arg z| \leq \alpha/3, |z| > R\}$ for all large R , and the asymptotic equation holds

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \frac{1}{q(z)} = (-1)^n \left(\frac{q'(z)}{q(z)}\right)^n \frac{1}{q(z)} \left(1 + O\left(\frac{1}{V(|z|)}\right)\right),$$

for $z \rightarrow \infty, |\arg z| \leq \alpha/3$, and all $n = 1, 2, \dots$

The proofs of Lemmas 1 and 3 are based on some facts of the theory of entire functions of completely regular growth ([4], Chapters 2, 3). Lemma 2 is a corollary of the well-known Beurling–Malliavin multiplier theorem.

To derive Theorem 1 we take a function $g(z)$ whose existence is established in Lemma 1 and, with help of Lemma 2, construct a real even entire function h of exponential type such that

$$\lim_{\substack{|x| \rightarrow \infty \\ x \in \mathbb{R}}} x^m (h(x)g(x))^{(n)} = 0, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \tag{13}$$

A well known result on entire functions of exponential type (see, e.g., [4], p. 240, Theorem 5) implies that $\log h(iy) = A|y| + o(|y|), |y| \rightarrow \infty$, where A is some positive constant. In view of (11) and (12) this gives:

$$|h(\pm i d_k)g(\pm i d_k)| \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty; \quad \text{sign}(h(\pm i d_k)g(\pm i d_k)) = (-1)^k.$$

Hence, there exists a so small positive c that every interval (c_{2k-1}, c_{2k}) contains at least two points, p_{2k-1} and p_{2k} , which are roots of the equation $h(iy)g(iy) = -c$.

The desired function is

$$f(z) = \frac{c + h(z)g(z)}{q(z)},$$

where

$$q(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{p_k^2}\right).$$

To show that f satisfies condition (5) we use (13) and the mutual position of zeros of g and q which imply

$$\log|f(x)| = \log \frac{1}{|g(x)|} + O(\log|x|), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

To show that n -th derivative of f have only finite number of real zeros we write

$$f^{(n)}(z) = c \left(\frac{d}{dz}\right)^n \frac{1}{q(z)} + \left(\frac{d}{dz}\right)^n \frac{h(z)g(z)}{q(z)}$$

and use Lemma 3 and (13).

4. Sketch of proof of Theorem 2

(i) Let $h, h(0) = 1$, be the function whose existence is established by Lemma 2. Then

$$M_x(r) \leq c \exp\{ar - bV(x - r)\}, \quad 0 < r < x, \tag{14}$$

where $M_x(r) = \max_{|z-x|=r} |h(z)|$ and a, b, c are positive constants. Using the exact expression for $f^{(n)}$ and the Cauchy integral formula for derivatives and (3), we conclude that $f^{(n)}(x), x \in \mathbb{R}$, does not vanish if

$$c \exp\{ar - bV(x - r)\} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{r}{x}\right)^n \quad \text{for } 0 < r < \frac{x}{2}.$$

Elementary considerations show that this inequality is satisfied for $r = DV(x), x = v(Cn \log n)$, where C and D are suitable constants.

(ii) For any natural number n , denote by $\nu_n(t)$ the number of zeros of $f^{(n)}$ in the disc $\{z : |z| \leq t\}$. If $f^{(n)}(0) \neq 0$, then by Jensen’s formula

$$\int_0^r \frac{\nu_n(t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f^{(n)}(r e^{i\varphi})| d\varphi - \log |f^{(n)}(0)|. \tag{15}$$

We choose $r = er(n, f)$. By Rolle’s theorem we have $\nu_n(r(n, f)) \geq n$, therefore the left-hand side of (15) is $\geq n$. Since f is a PW-function of type 1, we have

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f^{(n)}(er(n, f) e^{i\varphi})| d\varphi \leq \frac{2}{\pi} er(n, f) + \text{constant}.$$

To estimate the second term in the right-hand side of (15) we use the following lemma.

LEMMA 4. – Let f be an entire function of exponential type 1 bounded on \mathbb{R} . Then there exists an increasing sequence $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ of natural numbers such that

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n_{j+1}}{n_j} = 1; \quad \log |f^{(n)}(0)| = o(n), \quad n = n_j \rightarrow \infty. \tag{16}$$

Using this lemma, we obtain $n \leq (2/\pi)er(n, f) + o(n), n = n_j \rightarrow \infty$. Taking into account that $r(n, f)$ increases in n and the sequence $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ satisfies (16), we get (7).

References

[1] Clunie J., Rahman Q.I., Walker W.J., On entire functions of exponential type bounded on the real axis, J. London Math. Soc. 61 (2) (2000) 163–176.
 [2] Higgins J.R., Five short stories about cardinal series, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985) 45–89.
 [3] Higgins J.R., Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis: Foundations, Calderon Press, Oxford, 1996.
 [4] Levin B. Ya., Distribution of zeros of entire functions, Transl. of Math. Monogr., Vol. 5, American Mathematical Society, Providence, 1980.
 [5] Walker W.J., Oscillatory properties of Paley–Wiener functions, Indian Math. J. Pure Appl. Math. 25 (1994) 1253–1258.

The Note is the succinct version of a text on file for five years in the Academy Archives. Copy available upon request.