

Covid-19 SEIQR Yayılım Matematiksel Modeli

Covid-19 SEIQR Spread Mathematical Model

Çağlar Akman

Komuta Kontrol ve Savunma
Teknolojileri
HAVELSAN
Ankara, Türkiye
cakman@havelsan.com.tr

Okan Demir

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği
Bölümü
Bilkent Üniversitesi
Ankara, Türkiye
demir@ee.bilkent.edu.tr

Tolga Sönmez

Komuta Kontrol ve Savunma
Teknolojileri
HAVELSAN
Ankara, Türkiye
tsönmez@havelsan.com.tr

Özetçe—Bu bildiride Covid-19 salgınının nüfusta yayılımı SEIQR matematiksel modeli ile formüle edilmiştir. Kesikli zamanlı yayılım modeli ile salgının bulaş hızı ve hasta tespit oranı kestirilmektedir. Kısıtlı optimal kontrol problemi olarak ifade edilen kestirim modeli Pontryagin minimum prensibi ile çözülmüştür. Yayılım ve kestirim modeli gerçek verilerin üzerinde test edilmiş, performans sonuçları sunulmuştur. Önerilen yöntemin başarılı bir şekilde salgın parametrelerinin kestirimini yaptığı gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler—Covid-19, SEIQR modeli, Pontryagin minimum prensibi, durumsal farkındalık

Abstract—The spread of Covid-19 pandemic in the population is formulated with SEIQR mathematical model. The estimation model, which is defined as a discrete time optimal control problem, is solved with Pontryagin minimum principle. The spread estimation model is tested on the real data and associated performance results are presented. It is shown that the proposed method estimates the pandemic model parameters successfully.

Keywords—Covid-19, SEIQR model, Pontryagin minimum principle, situational awareness

I. GİRİŞ

2019 yılında başlayıp tüm dünyaya yayılan Covid-19 olarak adlandırılan salgın günümüzde de devam etmektedir. WHO tarafından yayınlanan rakamlara göre tüm dünyada salgının başlangıcından günümüze kadar onaylanmış yaklaşık 116 milyon vaka ve 2.5 milyon ölüm gerçekleşmiştir [1]. Çeşitli salgınların, insanlık tarihi boyunca gerçekleştiği gözlenmiştir. 20.yy'da İspanyol gribi (1918-1920, 40-50 milyon ölüm), Asya gribi (1957-1958, 1-2 milyon ölüm) ve Hong Kong gribi (1968-1970, 2 milyon ölüm) kaydedilmiştir [2, 3]. 21.yy başında yaklaşık %10'luk ölüm oranıyla SARS [4] ve 2009 yılında domuz gribi salgını raporlanmıştır [5].

Salgınların her biri tüm dünyayı yalnızca insan yaşamı olarak değil ayrıca psikolojik, sosyolojik ve ekonomik olarak etkilemektedir [6, 7]. Günümüzde ticari ve turizm amaçlı ulaşımın kolaylığı ve hızı, artan nüfus ve uluslararası etkileşimin tüm coğrafyalarda artması ile Covid-19 tüm kıtalarda ve ülkelerde görülmektedir. Salgın karşısında ülkeler maske, sosyal mesafe, sokağa çıkma kısıtlamaları, karantina hatta sınır kapatma gibi çeşitli önlemler almaktadır. Her ülkenin Covid-19 salgını karşısında aldığı önlemler değişmektedir ve her önlemin farklı bir ekonomik etkisi bulunmaktadır [8, 9].

Salgına karşı ülkelerin optimal kararlar vermesi uygulanacak kısıtlamalardan doğacak zararları en aza indirecektir. Bu sebeple ülkeler salgının gidişatına dair durumsal farkındalığa ihtiyaç duymaktadır. Ülke yönetimleri numuneler alıp toplumdaki hastalığın durumu takip edebileceği gibi matematiksel modeller ile salgının geleceğine dair kestirimlerde bulunulabilir.

Literatürde salgınların çeşitli matematiksel modellemeleri bulunmaktadır; bu modeller genelde S (Susceptible – Duyarlı), I (Infected – hasta) ve R (Recovered – Ölü ve iyileşen) olarak adlandırılan durumların birbirine geçişinin formüle edilmesi üzerine kurulmaktadır [10, 11]. Bu matematiksel model çok daha fazla detaylandırılarak daha keskin tanımlar ile ayrılmış durumların birbirine geçişi formüle edilebilir. Lin ve arkadaşları maruz kalan kişileri E (Exposed) hesaba katarak kavramsal bir model geliştirmiştir SEIR [12]. Higazy, SIDARTHE modelinde semptom gösteren hastalar, semptom göstermeyip tespit edilen hastalar, semptom göstermeyip tespit edilmeyen hastalar, kritik durumdaki hastalar, iyileşenler ve ölenler şeklindeki durumları hesaba katmıştır [13]. Her modelin kendine göre bir avantajı ve dezavantajı bulunmaktadır.

Model içindeki durumların sayısı fazlaştıkça durumlar arası geçiş belirsizliklerinin etkisi sistem çözümüne ve dolayısı ile kestirimlere olumsuz yönde etki etmektedir. Ayrıca, bu hesaplamalardaki karmaşıklık seviyesi artmakta ve işlem hızı düşmektedir. Bir başka şekilde, model çok sadeleştirildiğinde ise hesaplamalar daha basitleşmekte ve durum belirsizlikleri azalmaktadır ancak kestirim hassasiyeti düşmektedir. Bu sebeple, optimum ve güvenilir bir şekilde gözlenebilir verilere bağlı durumlardan oluşan bir modele ihtiyaç duyulmaktadır. Bu model doğru verilerle beslendiğinde salgının yayılımına dair hem hızlı hem de yeterli kestirimler oluşturulabilir.

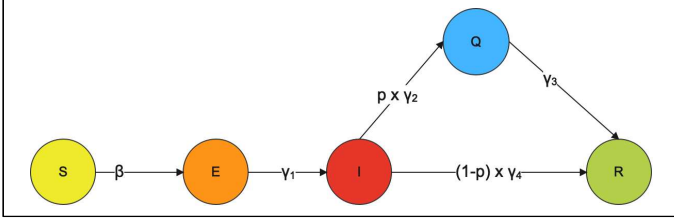
Ülkelerden toplanabilecek verilerin içinde toplum nüfusu, resmi hasta, ölüm ve iyileşme sayıları bulunmaktadır. Bunun dışında ülkeden ülkeye değişebilen karantina uygulamaları bulunmaktadır ve karantinadaki insanların sayısına da ulaşılabilmektedir. Ayrıca hastalığa dair kuluçka süresi de 14 gün olarak tespit edilmiştir [14]. Bu bilgilerden faydalanarak bu çalışmada en sade olacak şekilde S (Susceptible)-E (Exposed) – I (Infected) – Q (Quarantined) – R (Recovered) modeli geliştirilmiştir. Bu model üzerinde kestirim algoritmaları ile bulaşma hızı ve hasta sayısı tespiti yapılabilmektedir. Toplanan verilerdeki belirsizlikler ve ihmal edilen durumlarda modelde

ölçüm gürültüsü olarak ifade edilerek hesaba katılmaktadır. Yapılan performans ve gerçek veri üzerindeki testlerde modelin başarılı olduğu gözlenmiştir.

II. YÖNTEM

A. Yayılım Modeli

Bu bölümde salgın yayılım parametrelerinin kestirimi anlatılmıştır. Yayılım modeli kesikli zamanda ifade edilen genelleştirilmiş SIR tabanlı bir modeldir. Bu çalışmada önerilen model Şekil 1’de gösterilmektedir. S: Susceptible, E: Exposed, I: Infected, Q: Quarantined ve R: Recovered.



Şekil 1 SEIR Modeli

SEIQR modelinin denklemleri (1-5) verilmiştir.

$$S(n+1) = S(n) - \beta(n) \frac{S(n)I(n)}{N} \quad (1)$$

$$E(n+1) = E(n) - \gamma_1 E(n) + \beta(n) \frac{S(n)I(n)}{N} \quad (2)$$

$$I(n+1) = I(n) - (p(n)\gamma_2 + (1-p(n))\gamma_4)I(n) + \gamma_1 E(n) \quad (3)$$

$$Q(n+1) = Q(n) - \gamma_3 Q(n) + p(n)\gamma_2 I(n) \quad (4)$$

$$R(n+1) = R(n) + (1-p(n))\gamma_4 I(n) + \gamma_3 Q(n) \quad (5)$$

Bu denklemlerde N toplam nüfusu göstermektedir. Diğer sabit parametreler $\gamma_i, i = 1,2,3,4$ sırasıyla gün cinsinden ortalama kuluçka süresi, hasta tespit ve karantinaya alma süresi, karantinadaki hastaların iyileşme süresi ve asemptomatik hastaların ortalama iyileşme süresinin tersi olarak seçilmiştir. Yayılım hızı $\beta(n) > 0$ ve hasta tespit oranı $0 < p(n) < 1$ güne bağlı olarak değişen parametreler olarak tasarlanmıştır.

(1-5) arasında verilen dinamik model denklemleri, vektörel formatta (6-8) denklemlerindeki gibi ifade edilebilir.

$$x(n+1) = f(x(n), u(n)) \quad (6)$$

$$x(n) = [S(n) E(n) I(n) Q(n) R(n)]^T \quad (7)$$

$$u(n) = [\beta(n) p(n)]^T \quad (8)$$

Bu makalede ele alınan problem, günlük olarak açıklanan hasta sayısı ($Q(n)$) bilgisi kullanılarak zaman içinde değişen $\beta(n)$ ve $p(n)$ parametrelerinin kestirilmesidir. Nitekim, bu parametreler kestirildikten sonra verilen bir başlangıç $S(0), E(0), I(0), Q(0)$ ve $R(0)$ değerleri ile $I(n)$ değişimi de bulunabilir. Bu çalışmada verilen problem bir kısıtlı optimal kontrol problemi olarak formüle edilmiştir ve Pontryagin minimum prensibi kullanılarak çözülmüştür.

Bu tarz problemlerde Pontryagin minimum prensibi [15] nümerik çözüm aracı olarak kullanılabilir. Optimal çözüm aramak için gradyan metodunun [16] yeterli ve etkin olduğu görülmüştür. Problemin matematiksel ifadesi (9-11)

denklemlerinde gösterilmektedir. $\tilde{Q}(n)$ açıklanan yeni hasta verilerinden çıkarılabilen her güne ait toplam hasta sayısıdır.

$$\min_{\beta(n), p(n)} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{n_f} (Q(n) - \tilde{Q}(n))^2 \quad (9)$$

$$\text{s.t. } x(n+1) = f(x(n)) \quad (10)$$

$$\beta(n) > 0, 0 < p(n) < 1 \quad (11)$$

Fakat bu problemin çözümü tekil değildir. Çözümü sağlayan sınırsız $\beta(n)$ ve $p(n)$ dizileri bulunabilir. Çözüm setini daha kısıtlı hale getirmek için maliyet fonksiyonuna eldeki ek tahmini bilgiler eklenerek şu hale getirilmiştir:

$$\min_{\beta(n), p(n)} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{n_f} (Q(n) - \tilde{Q}(n))^2 + \frac{1}{2} (S(n_f) - \tilde{S}(n_f))^2 + \frac{1}{2} (R(n_f) - \tilde{R}(n_f))^2 \quad (12)$$

Burada $\tilde{S}(n_f)$ hastalığı geçirmemiş kişilerin sayısı ve $\tilde{R}(n_f)$ hastalığı geçirmiş kişilerin sayısıdır. Bu değerler, n_f zamanında yetkili kurumlar tarafından rastgele alınan örneklerden kaçta kaçında antikor geliştirildiğine bakılarak ve orantılanarak tahmin edilecektir. Ek olarak, β ve p üzerindeki kısıtlamalar maliyet fonksiyonuna logaritmik bariyer methodu ile iliştilerilebilir. Bu durumda maliyet fonksiyonunun son hali (13) olur.

$$\min_{\beta(n), p(n)} \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{n_f} (Q(n) - \tilde{Q}(n))^2 + \frac{1}{2} (S(n_f) - \tilde{S}(n_f))^2 + \frac{1}{2} (R(n_f) - \tilde{R}(n_f))^2 + \sum_{n=0}^{n_f} \Psi(-\beta(n)) + \Psi(-p(n)) + \Psi(p(n) - 1) \quad (13)$$

Ψ derin öğrenme uygulamasında kullanılan bir logaritmik bariyer fonksiyonudur [17]. (14)’de $t > 0$ bir sabittir ve değeri arttıkça limitleme etkisi artar. Pandemi modeline ait geliştirilmiş (13-14) denklemleri [17]’de belirtilen yöntem ile çözülmektedir.

$$\Psi(z) = \begin{cases} -\frac{1}{t} \log(-z), & z \leq -\frac{1}{t^2} \\ tz - \frac{1}{t} \log(\frac{1}{t^2}) + \frac{1}{t}, & z > -\frac{1}{t^2} \end{cases} \quad (14)$$

B. Kestirim Algoritması

Açıklanan optimizasyon probleminin çözümünde Pontryagin minimum prensibi [15] kullanılmıştır. Pontryagin minimum prensibi, kısıtlı optimizasyon problemlerinde kısıt bir dinamik sistem şeklinde verildiğinde çözüm için genel bir çözüm metodu sağlamaktadır. Verilen problem sistem dinamikleri bir eşitlik kısıtı olarak düşünülebilir ve problemin Lagrangian’ı şu şekilde yazılabilir

$$H(x, u) = J(x, u) + \sum_{n=0}^{n_f-1} \lambda(n+1)^T x(n+1) \quad (15)$$

Burada λ Lagrange değişkenleridir ve J

$$J = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{n_f} (Q(n) - \tilde{Q}(n))^2 + \frac{1}{2} (S(n_f) - \tilde{S}(n_f))^2 + \frac{1}{2} (R(n_f) - \tilde{R}(n_f))^2 \quad (16)$$

$$+ \sum_{n=0}^{n_f} \Psi(-\beta(n)) + \Psi(-p(n)) + \Psi(p(n) - 1)$$

ve $u = [\beta p]^T$ olarak tanımlanmıştır.

Problemin çözümü (17-19) koşullarını sağlaması gerekir.

$$\frac{\partial H(n)}{\partial \lambda(n+1)} = x(n+1) \quad (17)$$

$$\frac{\partial H(n)}{\partial x(n)} = \lambda(n) \quad (18)$$

$$\lambda(n)^T = \lambda(n+1)^T \frac{\partial f(x(n), u(n))}{\partial x(n)} + \frac{\partial J}{\partial x(n)} \quad (19)$$

. Burada $H(n)$ tanımını n 'inci adımdaki maliyet şeklindedir:

$$H(n) = \frac{1}{2}(Q(n) - \tilde{Q}(n))^2 + \Psi(-\beta(n)) + \Psi(-p(n)) + \Psi(p(n) - 1) \quad (20)$$

Optimal $u(n) = [\beta(n) p(n)]$ için çözmek istenirse

$$\min_{u(n)} H(n) \quad (21)$$

çözülerek bulunabilir [15].

Algoritma basamakları şu şekilde listelenmiştir:

1. Bir başlangıç durumu $x(0)$ ve $u(n), n = 0, \dots, n_f - 1$ seç.
2. $x(0)$ ve $u(n)$ i kullanarak sistemi dinamiklerini yaz

$$x(n+1) = f(x(n), u(n))$$

3. Simülasyonu çalıştır
4. Simülasyonda elde edilen $x(n)$ i kullanarak $\lambda(n)$ i bul

$$\lambda(n)^T = \lambda(n+1)^T \frac{\partial f(x(n), u(n))}{\partial x(n)} + \frac{\partial J}{\partial x(n)}$$

5. $\lambda(n)$ i kullanarak $n = n_f$ ten $n = 0$ a kadar hesapla.
6. $u(n)$ i iyileştirmek için $\delta u(n)$ hesapla

$$\delta u(n) = \lambda(n+1)^T \frac{\partial f(x(n), u(n))}{\partial u(n)} + \frac{\partial J}{\partial u(n)}$$

7. Yeni sistem girdisi $u(n) \leftarrow u(n) - \delta u(n)$ ile Adım 2'ye dön.

Yukarıdaki adımlar $u(n)$ bir minimuma ulaşincaya kadar devam edildiğinde maliyet fonksiyonu (22) sıfıra yaklaşır ve $\beta(n)$ ve $p(n)$ değerleri bulunmaktadır.

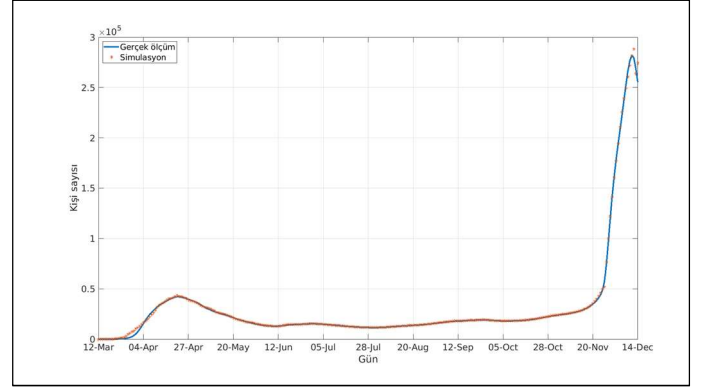
$$Q(n) - \tilde{Q}(n) \quad (22)$$

III. SİMÜLASYON TEST VE PERFORMANS

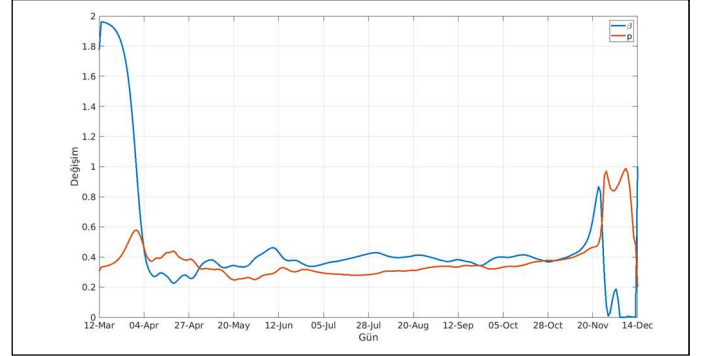
Açıklanan algoritma 12 Mart 2020-14 Aralık 2020 arasında açıklanan günlük yeni hasta verisine uygulanmıştır (EU Open Data Portal, n.d.). Sistem parametreleri aşağıdaki gibi seçilmiştir:

$$\gamma_1 = 0.25, \gamma_2 = 0.5, \gamma_3 = 0.0833, \gamma_4 = 0.0714$$

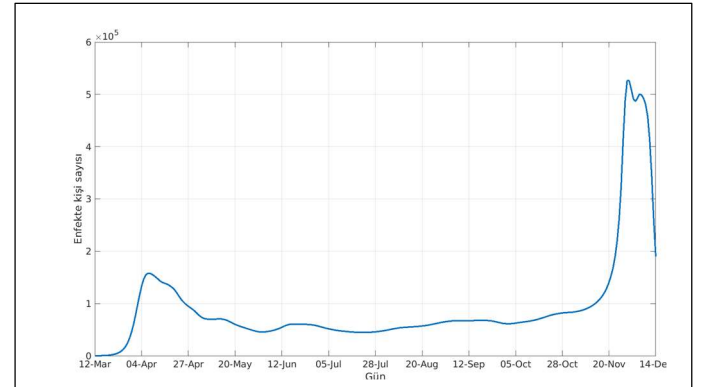
$$N = 82003882$$



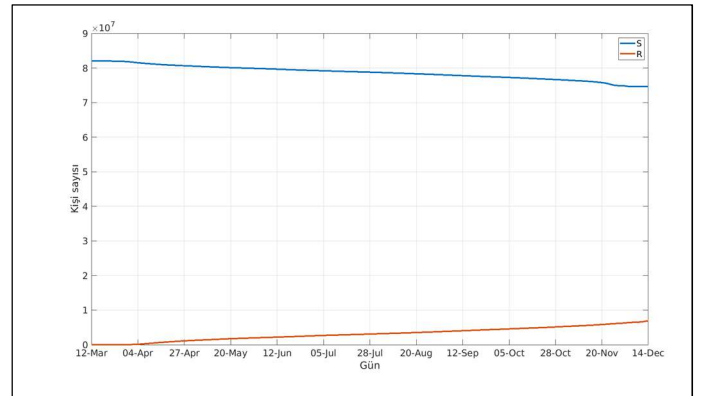
Şekil 2 Gerçek hasta sayısı ve Simülasyon hasta sayısı kestirimi



Şekil 3 Bulaş oranı $\beta(n)$ ve hasta tespit oranı $p(n)$



Şekil 4 Hasta sayısı kestirim grafiği



Şekil 5 Sağlıklı birey (mavi) ve hastalığı atlattığı ya da ölen kişi (kırmızı) sayısı kestirim grafiği

Şekil 2’de gerçek veri noktalar ile gösterilmiştir. Her gün yayınlanan yeni hasta sayısına göre toplam hasta sayısı kestirimi yapılmıştır. Simülasyondan elde edilen hasta sayısı ile gerçek hasta sayısı örtüşmektedir. Ortalama kestirim hatası o zamanki hasta sayısının %3’ü olarak hesaplanmıştır.

Şekil 2’de gösterilen sonucun elde edilmesini sağlayan $\beta(n)$ ve $p(n)$ Şekil 3’te gösterilmektedir. Salgının ilk günlerinde β değerinin yüksek olması beklenen bir sonuçtur çünkü bu dönemde salgına karşı önlemler henüz sıkı hale gelmemiştir. Alınan önlemler sonucu yayılım hızı Şekil 3’te gösterildiği gibi azaltılabilmektedir. Mayıs haziran aylarındaki kısıtlamaların azaltılması ile yayılım hızı tekrar tırmanışa geçtiği gözlemlenmektedir. Tespit edilen hastaların hasta bireylere oranı $p(n)$ çoğunlukla 0.3 civarında gezinmektedir. Yani simülasyon hasta bireylerin %30’unu tespit ettiğimizi göstermektedir. Açıklanan verilerde hasta-vaka ayrımının kaldırıldığı Kasım ayı sonundan itibaren p değeri 1’e yakın seyrettiği grafikte gösterilmektedir. Bu dönemde daha sıkı kısıtlamaların uygulanması sebebiyle bulaş oranı $\beta(n)$ sıfıra yaklaşmıştır.

Şekil 4 ve Şekil 5 sırasıyla elde edilen $\beta(n)$ ve $p(n)$ ile uyumlu hasta sayısını $I(n)$, sağlıklı kişi sayısını $S(n)$ ve hastalığı geçirmiş ya da ölen kişi sayısını $R(n)$ göstermektedir.

IV. SONUÇ

Bu çalışmada Covid-19 salgını kapsamında SEIQR kesikli zamanlı matematiksel model geliştirilmiştir. Geliştirilen modelde SIR modeli yeni durum değişkenleri eklenerek hızlı ve etkili sonuç elde edilmesi hedeflenmiştir. Modelde bulaşma hızı ve hasta tespit oranı bilinmeyen model parametreleri olarak belirlenmiştir. Karantinadaki hasta sayısı ölçülebilir ve gözlemlenebilir parametre olarak kabul edilmiştir. Optimal kontrol algoritması kullanılarak bulaşma hızı ve hasta tespit oranı kestirilmiştir. Bu kestirimler kullanılarak hasta sayısı tahmini yapılmıştır. Ortalama kestirim hatası o zamanki hasta sayısının %3’ü olarak hesaplanmıştır. Önerilen yöntem resmi veriler üzerinde denenerek performansı test edilmiş ve beklenen sonuçlar elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] WHO, "WHO Coronavirus (COVID-19) Dashboard," [Online]. Available: <https://covid19.who.int/>. [Accessed 9 March 2021].
- [2] P. R. Saunders-Hastings and D. Krewski, "Reviewing the history of pandemic influenza: understanding patterns of emergence and transmission," *Pathogens*, vol. 5, no. 4, p. 66, 2016.
- [3] E. D. Kilbourne, "Influenza pandemics of the 20th century," *Emerging infectious diseases*, vol. 12, no. 1, p. 9, 2006.
- [4] J. D. Cherry and P. Krogstad, "Sars: The first pandemic of the 21 st century," *Pediatric research*, vol. 56, no. 1, pp. 1-5, 2004.
- [5] A. Amato-Gauci, P. Zucs, R. Snacken, B. Ciancio, V. Lopez, E. Broberg, ... and A. Nicoll, "Surveillance trends of the 2009 influenza A (H1N1) pandemic in Europe," *Eurosurveillance*, vol. 16, no. 26, p. 19903, 2011.
- [6] W. Qiu, S. Rutherford, A. Mao and C. Chu, "The pandemic and its impacts," *Health, culture and society*, vol. 9, pp. 1-11.
- [7] J. Hiscott, M. Alexandridi, M. Muscolini, E. Tassone, E. Palermo, M. Soultioti and A. Zevini, "The global impact of the coronavirus pandemic.," *Cytokine & growth factor reviews*, vol. 53, pp. 1-9, 2020.

- [8] T. Hale, A. Petherick, T. Phillips and S. Webster, "Variation in government responses to COVID-19," *Blavatnik school of government working paper*, vol. 31, pp. 2020-11, 2020.
- [9] N. Haug, L. Geyrhofer, A. Londei, E. Dervic, A. Desvars-Larrive, V. Loreto, ... and P. Klimek, "Ranking the effectiveness of worldwide COVID-19 government interventions," *Nature human behaviour*, vol. 4, no. 12, pp. 1303-1312, 2020.
- [10] Y. C. Chen, P. E. Lu, C. S. Chang and T. H. Liu, "A time-dependent SIR model for COVID-19 with undetectable infected persons," *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, vol. 7, no. 4, pp. 3279-3294, 2020.
- [11] I. M. A. Cooper and C. G. Antonopoulos, "A SIR model assumption for the spread of COVID-19 in different communities," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 139, p. 110057, 2020.
- [12] Q. Lin, S. Zhao, D. Gao, Y. Lou, S. Yang, S. S. Musa, ... and D. He, "A conceptual model for the coronavirus disease 2019 (COVID-19) outbreak in Wuhan, China with individual reaction and governmental action," *International journal of infectious*, vol. 93, pp. 211-216, 2020.
- [13] M. Higazy, "Novel fractional order SIDARTHE mathematical model of COVID-19 pandemic," *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 138, p. 110007, 2020.
- [14] S. A. Lauer, K. H. Grantz, Q. Bi, F. K. Jones, Q. Zheng, H. R. Meredith, ... and J. Lessler, "The incubation period of coronavirus disease 2019 (COVID-19) from publicly reported confirmed cases: estimation and application," *Annals of internal medicine*, vol. 172, no. 9, pp. 577-582, 2020.
- [15] D. P. Bertsekas, *Dynamic Programming and Optimal Control*, vol. 1 and 2, Belmont, Massachusetts: Athena Scientific, 1995.
- [16] S. Boyd, S. P. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex optimization*, Cambridge university press, 2004.
- [17] H. Kervadec, J. Dolz, J. Yuan, C. Desrosiers, E. Granger and I. B. Ayed, "Constrained deep networks: Lagrangian optimization via log-barrier extensions," *arXiv preprint arXiv:1904.04205*, 2019.
- [18] "EU Open Data Portal," [Online]. Available: <https://data.europa.eu/euodp/en/data/dataset/covid-19-coronavirus-data/resource/55e8f966-d5c8-438e-85bc-c7a5a26f4863>. [Accessed March 2021].