

# Geliş Açısı Kestirimi Problemlerinde Capon Huzmeleyici ve Enküçük Ortalama Kareler Hatası ile Huzmeleme Teknikleri

## Capon's Beamformer and Minimum Mean Square Error Beamforming Techniques in Direction of Arrival Estimation

Berkan Kılıç<sup>1,2</sup>, Orhan Arıkan<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü, İ.D. Bilkent Üniversitesi, Ankara, Türkiye

<sup>2</sup>ASELSAN Araştırma Merkezi, ASELSAN A.Ş., Ankara, Türkiye

bekilic@aselsan.com.tr, oarikan@ee.bilkent.edu.tr

**Özetçe**—Geliş açısı kestirimi (GAK), dizi sinyal işleme alanının en yaygın uygulamalarından biridir. Capon huzmeleyici, belirli şartlar altında yüksek GAK başarımı sağlayan ve yaygın olarak kullanılan bir tekniktir. Enküçük ortalama kareler hatası (EOKH) ile huzmeleme tekniği ise, kestirim yapabilmek için hedeflerin genellikle bilinmeyen sinyal karakteristiklerini gerektirdiğinden, Capon huzmeleyici kadar yaygın çalışmamıştır. Bu çalışmada EOKH ile huzmeleme tabanlı bir GAK tekniği sunulmakta ve sunulan teknik kullanılarak Capon huzmeleyici tekniği türetilmektedir. Bu sayede Capon huzmeleyici tekniğine yeni bir bakış açısı getirilmektedir.

**Anahtar Kelimeler**—Capon huzmeleyici, Enküçük ortalama kareler hatası ile huzmeleme

**Abstract**—Direction of arrival (DoA) estimation is among the most common applications of array signal processing. Capon's beamformer is a commonly used technique that enables high DoA estimation accuracy under certain conditions. Minimum mean square error (MMSE) beamforming has not been studied as commonly as Capon's beamformer since it requires the signal characteristics of the targets, which are typically unknown. In this work, an MMSE beamforming based DoA estimation technique is presented and Capon's beamformer is derived by using the presented technique. Hence, a new perspective on Capon's beamformer is provided.

**Keywords**—Capon's beamformer, Minimum mean square error beamforming

### I. GİRİŞ

Literatürde farklı tasarım ölçütleri kullanan çeşitli huzmeleme teknikleri kapsamlı bir şekilde incelenmiş ve geliş açısı kestirimine (GAK) uygulanmıştır [1], [2]. Bartlett huzmeleyici ve Capon huzmeleyici [3] GAK'ta en yaygın çalışılmış huzmeleme teknikleri olarak kabul edilebilir. Hem Bartlett huzmeleyici hem de Capon huzmeleyici teknikleri, hedeflerin yayın karakteristikleri bilgisine ihtiyaç duymadan

kestirim yapabilmektedir. Tipik geliş açısı kestirimi problemlerinde izlenen hedeflerin yayın karakteristiklerinin bilinmediği kabul edildiğinden, bu yöntemler tipik GAK için uygun yöntemler olarak görülürler. Enküçük ortalama kareler hatası (EOKH) ile huzmeleme tekniği ise, GAK için hedeflerin sinyal karakteristiği bilgisini gerektirir. Bu nedenle, GAK'ta EOKH ile huzmeleme ya da daha genel olarak EOKH tabanlı teknikler, Bartlett ve Capon huzmeleyici kadar yaygın çalışmamıştır.

Özellikle kablosuz iletişimde ve su altı kaynak lokalizasyonunda işaret bilgilerinin bilindiği uygulamalar olabilir [4]. Bu durumlarda EOKH tabanlı teknikler kullanılabilir ve işaret bilgisinin kullanılmadığı tekniklere göre başarımları artışı sağlanabilir. Bu çalışmada, tipik bir GAK problem modeli için EOKH tabanlı bir teknik sunulacak ve sunulan teknik ile Capon huzmeleyici arasında bir matematiksel ilişki türetilerek Capon huzmeleyicinin aslında verilen EOKH tabanlı tekniğin özel bir durumu olduğu gösterilecektir. Bilgimiz dâhilinde, Capon huzmeleyici ve EOKH tabanlı teknikler farklı çalışma alanlarında bireysel olarak kapsamlı şekilde çalışılmış olsalar da, burada sunacağımız matematiksel ilişki şu ana kadar literatürde gösterilmemiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde dar bant koşullarında sensör dizileri ile hedef geliş açılarının kestirimi anlatılmakta, üçüncü bölümünde ise EOKH tabanlı bir GAK tekniği sunularak bu teknik ile Capon huzmeleyici arasındaki matematiksel ilişki gösterilmektedir. Dördüncü bölümde benzetim tabanlı başarımlar sonuçları sunulmakta, beşinci bölümde ise çalışma sonlandırılıp olası gelecek çalışmalardan bahsedilmektedir.

Çalışma boyunca büyük ve koyu karakterler matrisleri, küçük ve koyu karakterler vektörleri belirtmektedir.  $\mathbf{A}$  matrisinin transpozu  $\mathbf{A}^T$ , karmaşık transpozu ise  $(\mathbf{A}^*)^T = \mathbf{A}^H$  ifadeleri ile gösterilmektedir.

## II. DAR BANT KOŞULLARINDA SENSÖR DİZİLERİ İLE HEDEF GELİŞ AÇILARININ KESTİRİMİ

Doğrusal, izotropik ve homojen bir ortamda; sensör dizisinin uzak alanındaki hedefler için dar bantlı GAK problem modeli tipik olarak

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k), \quad (1)$$

ile ifade edilebilir. Burada  $\mathbf{x}(k)$ ,  $k$  zaman adımında (anlık durum görüntüsünde) sensör dizisi tarafından alınan işareti belirtir.  $\mathbf{s}(k)$  hedef kaynakların yaptığı yayınların karmaşık zarflarını içeren vektör,  $\mathbf{A}(\theta)$  ise yönlendirme matrisidir. Eğer  $M$  anten elemanı sayısını,  $K$  ise hedef sayısını belirtirse;  $\mathbf{A}(\theta) \in \mathbb{C}^{M \times K}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ ,  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^{K \times 1}$ ,  $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$  boyutlarına sahiptir. Son olarak  $\mathbf{n}(k)$  uzaysal beyaz toplanır karmaşık Gauss gürültüsünü ifade eder ve  $\mathbf{n} \sim N_c(0, \sigma_n^2 \mathbf{I}_M)$  olasılıksal dağılımına sahiptir. Yani  $E\{\mathbf{n}\mathbf{n}^H\} = \sigma_n^2 \mathbf{I}_M$  ve  $E\{\mathbf{n}\mathbf{n}^T\} = \mathbf{0}$  eşitlikleri sağlanır.

Denklem (1)'de verilen model, tek zaman adımında alınan sinyali vermektedir. Pek çok GAK tekniğinde, birden fazla zaman adımını boyunca farklı ölçümler alınarak kestirimlerin doğruluğu artırılır. Bu hem sinyal gürültü oranı (SGO) kazancı, hem de Capon huzmeleyici gibi alınan ölçümlerin kovaryans matrislerini kullanan teknikler için daha doğru bir örneklem kovaryans matrisi tahmini sağlar. İzlenen hedeflerin geliş açılarının ölçüm alınan zaman adımları boyunca değişmediği kabul edildiğinde, (1)'deki model

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{S} + \mathbf{N}, \quad (2)$$

ile genişletilebilir. Denklem (2)'deki  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{S}$ , ve  $\mathbf{N}$  matrisleri; (1)'de yalnızca tek zaman adımı için verilen  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{s}$ , ve  $\mathbf{n}$  vektörlerinin ardışık zaman adımlarına denk gelen matris kolonları olarak yazılmasıyla elde edilir. Ölçüm yapılan zaman adımı sayısına  $T$  dediğimizde, (2)'deki matris boyutları  $\mathbf{A}(\theta) \in \mathbb{C}^{M \times K}$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{M \times T}$ ,  $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{K \times T}$ ,  $\mathbf{N} \in \mathbb{C}^{M \times T}$  şeklindedir.

## III. CAPON HUZMELEYİCİ VE EN KÜÇÜK ORTALAMA KARELER KESTİRİCİSİ TABANLI GELİŞ AÇISI KESTİRİMİ

Capon huzmeleyici, belirli bir yöndeki kazancı sabit tutarken başka yönlerden gelen sinyallerin ve gürültünün etkisini enküçüklemeye çalışır. Huzmeleme katsayısı  $\mathbf{w}$  ile belirtildiğinde,  $\mathbf{w}$ 'yi bulmak için çözülen dışbükey problem

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} \quad \text{öyle ki } \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta) = 1, \quad (3)$$

şeklindedir. Lagrange çarpanları kullanılarak bu problem kısıtsız bir eniyileme problemine dönüştürülür:

$$L(\mathbf{w}, \lambda) = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} + \lambda(1 - \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta)). \quad (4)$$

$L(\mathbf{w}, \lambda)$ 'nin  $\mathbf{w}$ 'ya göre türevi alınıp 0'a eşitlendiğinde  $\hat{\mathbf{w}} = \frac{1}{2} \lambda (\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta))$  elde edilir ve bulunan ifade  $\hat{\mathbf{w}}^H \mathbf{a}(\theta) = 1$  yerine yazıldığında

$$\hat{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}, \quad (5)$$

bulunur. Capon huzmeleyicisinin türetilmesi sırasında genellikle görmezden gelinen bir nokta,  $\hat{\mathbf{w}}$  katsayılarının direkt olarak (3) yerine onun ikili (dual) probleminin çözülerek elde edilmesidir. Pek çok optimizasyon probleminde, ikili problemin çözülmesi asıl (primal) problemin sonucunu vermek yerine asıl probleme yalnızca bir sınır sunar. Ancak, (3)'te verilen dışbükey problem için Slater koşulu [5] yalnızca asıl problemin olurluğunu (primal feasibility) koşullar. Dolayısıyla, ikili problemin çözümü aynı zamanda asıl problemin, yani (3)'ün çözümünü verir.

$\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}$  ifadesinde  $\mathbf{w}$  yerine (5)'te bulunan  $\hat{\mathbf{w}}$  yazıldığında

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}, \quad (6)$$

eniyileme problemine ulaşılır. Denklem (6), bir güç spektrumu olarak düşünülüp  $\theta$ 'ya göre grafiği çizildiğinde, GAK için bu grafiğin hedef sayısı kadar en yüksek büyüklükteki tepe noktası bulunacaktır. Ancak, hedef sinyallerin olasılıksal karakteristikleri tipik olarak bilinmediğinden  $\mathbf{R}_{xx}^{-1}$  ifadesi bilinmemektedir. Bunun yerine genellikle, aşağıda verilen örneklem kovaryans matrisi tahmini kullanılır:

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx} = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k). \quad (7)$$

Denklem (7)'nin  $\mathbf{R}_{xx}$ 'e yakın bir kovaryans matrisi tahmini olması için, kullanılan zaman adımı sayısı  $T$ , büyük önem arz etmektedir. Düşük  $T$ 'nin başarıma olumsuz etkisi benzetim tabanlı başarımlarında gösterilecektir.

EOKH ile huzmeleme gibi tekniklerde,  $\mathbf{w}$ 'nin bulunması için bir referans sinyal kullanılır. Bu çalışmada  $\hat{s}$  hedef kaynağın referans sinyal karakteristiğini belirtmek üzere

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \min_{\mathbf{w}} E\{|\mathbf{w}^H \mathbf{x} - \hat{s}|^2\}, \quad (8)$$

eniyileme problemi çözülecektir.  $E\{|\mathbf{w}^H \mathbf{x} - \hat{s}|^2\}$  ifadesi

$$E\{|\mathbf{w}^H \mathbf{x} - \hat{s}|^2\} = E\{(\mathbf{w}^H \mathbf{x} - \hat{s})(\mathbf{w}^H \mathbf{x} - \hat{s})^H\} = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w} - \mathbf{w}^H E\{\mathbf{x} \hat{s}^*\} - E\{\hat{s} \mathbf{x}^H\} \mathbf{w} + E\{\hat{s} \hat{s}^*\}, \quad (9)$$

şeklinde yazılabilir. Dışbükey olan bu ifadeyi enküçükleyen  $\mathbf{w}$  ifadesini bulmak için ifadenin  $\mathbf{w}$ 'ya göre türevi alınıp sıfıra eşitlenir ve  $\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1} E\{\mathbf{x} \hat{s}^*\}$  elde edilir.  $\hat{s}$  ile yayın yapan kaynağın bulunduğu açı  $\theta$  ise:

$$E\{\mathbf{x} \hat{s}^*\} = E\left\{\sum_{i=1}^K \mathbf{a}(\theta_i) s_i \hat{s}^* + \mathbf{n} \hat{s}^*\right\} = E\left\{\sum_{i=1, \theta_i \neq \theta}^K \mathbf{a}(\theta_i) s_i \hat{s}^*\right\} + |\hat{s}|^2 \mathbf{a}(\theta), \quad (10)$$

şeklinde yazılabilir.  $E\{\sum_{i=1, \theta_i \neq \theta}^K \mathbf{a}(\theta_i) s_i \hat{s}^*\}$  ifadesi,  $\theta$ 'dan bağımsız olduğundan  $C$  olarak tanımlandığında,  $E\{\mathbf{x} \hat{s}^H\} = C + |\hat{s}|^2 \mathbf{a}(\theta)$  olarak yazılır. Literatürde yaygın olarak farklı kaynakların yayınlarının birbirlerinden ilintisiz olduğu kabul edilir ve yayınların her biri sıfır ortalamalı rasgele değişkenler olarak modellenir. Bu durumda  $C = 0$  olur. Ancak, gösterilecek matematiksel ilişki için böyle bir varsayma ihtiyaç duyulmamaktadır. Bu çalışmada, GAK için

Capon huzmeleyici gibi tipik huzmeleme teknikleri yaklaşımlarından farklı olarak aşağıdaki eniyileme probleminin çözülmesi önerilmektedir:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \sum_{k=1}^T |\hat{\mathbf{w}}^H(\theta) \mathbf{x}(k) - \hat{s}(k)|^2$$

öyle ki  $\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(\mathbf{C} + |\hat{s}|^2 \mathbf{a}(\theta))$ . (11)

Vektörlerin üçgen eşitsizliği özelliği kullanılarak

$$\sum_{k=1}^T |\hat{\mathbf{w}}^H(\theta) \mathbf{x}(k) - \hat{s}(k)|^2 \leq \sum_{k=1}^T |\hat{\mathbf{w}}^H(\theta) \mathbf{x}(k)|^2 + \sum_{k=1}^T |\hat{s}(k)|^2, \quad (12)$$

yazılabilir. Bir yaklaşımla olarak (11)'deki ifade değil, onun üst sınırı, yani  $\sum_{k=1}^T |\hat{\mathbf{w}}^H(\theta) \mathbf{x}(k)|^2 + \sum_{k=1}^T |\hat{s}(k)|^2$  enküçüklenebilir. Bu yaklaşım, optimizasyon literatüründe sıklıkla kullanılır.  $\sum_{k=1}^T |\hat{\mathbf{w}}^H(\theta) \mathbf{x}(k)|^2 + \sum_{k=1}^T |\hat{s}(k)|^2$  ifadesindeki  $\sum_{k=1}^T |\hat{s}(k)|^2$ ,  $\theta$ 'ya bağlı olmadığından

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \sum_{k=1}^T |\hat{\mathbf{w}}^H(\theta) \mathbf{x}(k)|^2 \equiv \arg \min_{\theta} \sum_{k=1}^T |\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{x}(k)|^2, \quad (13)$$

yazılabilir. Denklem (13) aslında Capon huzmeleyicinin çözdüğü problem olan (6)'ya denktir. Bunu göstermek için

$$|\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{x}(k)|^2 = (\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{x}(k)) (\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{x}(k))^H = \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta), \quad (14)$$

ifadesi (13)'te yerine yazılır ve

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \sum_{k=1}^T \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta) \equiv \arg \min_{\theta} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \left( \sum_{k=1}^T \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k) \right) \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta), \quad (15)$$

elde edilir. Denklem (7) kullanılarak,  $\mathbf{R}_{xx} = \hat{\mathbf{R}}_{xx}$  ve  $\sum_{k=1}^T \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k) = T \hat{\mathbf{R}}_{xx}$  yazıldığında:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \mathbf{a}^H(\theta) T \hat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta) \equiv \arg \max_{\theta} \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta)}, \quad (16)$$

elde edilir. Görüldüğü üzere (6) ve (16),  $\mathbf{R}_{xx}$  yerine (7)'de verilen numune kovaryans matrisi  $\hat{\mathbf{R}}_{xx}$  kullanıldığında eşdeğer problemler haline gelmektedir. Dolayısıyla EOKH tabanlı tekniğin  $\hat{s}$  bilgisi kullanılmadığı takdirde Capon huzmeleyici ile aynı problemi çözdüğü gösterilmiştir.

Hem EOKH tabanlı teknik, hem de Capon huzmeleyici tekniği  $\hat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}$ 'i hesaplamayı gerektirir ve bu durum tekniklerin gürbüzlüğünü olumsuz etkilemektedir. Literatürde “gürbüz” Capon huzmeleyici teknikleri yaygın olarak çalışılmıştır ve bu amaç için kullanılan en yaygın tekniklerden birisi “köşegen yükleme” tekniğidir [6]. Bu teknikte, (5)'te elde edilen huzmeleme katsayıları ifadesi:

$$\hat{\mathbf{w}} = \frac{(\hat{\mathbf{R}}_{xx} + \mu \mathbf{I}_M)^{-1} \mathbf{a}(\theta)}{\mathbf{a}^H(\theta) (\hat{\mathbf{R}}_{xx} + \mu \mathbf{I}_M)^{-1} \mathbf{a}(\theta)}, \quad (17)$$

ile değiştirilir. Benzer şekilde, gürbüz bir EOKH tabanlı teknik için de, (11)'deki  $\hat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}$  ifadesi  $(\hat{\mathbf{R}}_{xx} + \mu \mathbf{I}_M)^{-1}$  ile değiştirilebilir. Özellikle düşük SGO içeren durumlarda ve/veya  $T$  sayısı düşüken, köşegen yükleme gibi gürbüzleştirme teknikleri kritik öneme sahiptir.

Denklem (11)'e tekrar döndüğünde, sunulan optimizasyon problemi yalnızca  $\hat{s}$  sinyaline sahip tek bir hedef içindir. Bu problemin çok hedefli senaryolar için genişletilmiş hali aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \sum_{i=1}^K \sum_{k=1}^T |\hat{\mathbf{w}}_i^H(\theta) \mathbf{x}(k) - \hat{s}_i(k)|^2$$

öyle ki  $\hat{\mathbf{w}}_i = \mathbf{R}_{xx}^{-1}(\mathbf{C} + |\hat{s}_i|^2 \mathbf{a}(\theta))$ . (18)

Bu durumda, (18)'in bedel fonksiyonunun çarpım tersi farklı ızgara noktalarına denk gelen  $\theta$  açılarına göre çizdirilir ve  $K$  adet en yüksek büyüklükteki tepe noktası geliş açıları olarak çıkarılır.

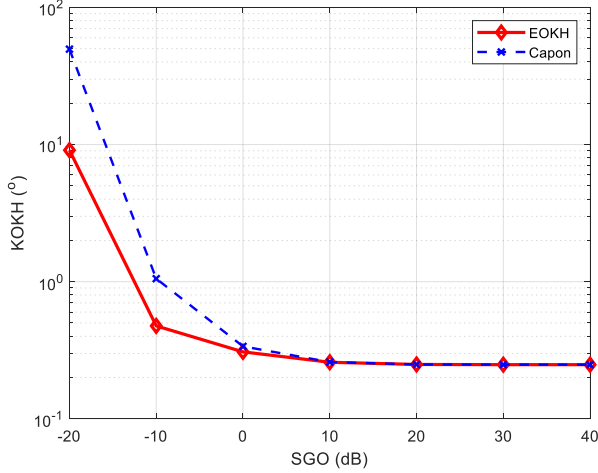
Çok farklı yaklaşımlar sergilemelerine rağmen, diğer bir yaygın GAK yöntemi olan MUSIC [7] ile Capon huzmeleyici arasındaki ilişki, teknikler çok uzun yıllardır kullanılmasına rağmen, görece olarak yeni bir çalışma olan [8]'de gösterilmiştir. Bu sebeple, [8]'deki çalışma aracılığıyla, MUSIC ile bu çalışmada gösterilen EOKH tabanlı teknik arasında da dolaylı bir matematiksel bir ilişki bulunduğunu söyleyebiliriz.

#### IV. BENZETİM SONUÇLARI

Çalışmada gösterildiği üzere, gösterilen EOKH tabanlı teknik Capon huzmeleyicisinden daha genel bir tekniktir. Dolayısıyla doğal beklenti, EOKH tabanlı tekniğin hedeflerin sinyal karakteristiğini de kullanması nedeniyle Capon huzmeleyicisinden daha yüksek başarımlar göstereceğidir. Benzetimlerde (2)'deki  $\mathbf{S}$  sinyallerinin elemanlarının aynı büyüklükte, ancak  $[0, 2\pi]$  aralığında rasgele fazlara sahip oldukları kabul edilmiştir. Bu sebeple  $E\{s_i\} = 0$ ,  $E\{|s_i|^2\} = P_s$  ve  $\delta_{ij}$  Kronecker delta fonksiyonunu göstermek üzere  $E\{s_i^* s_j\} = P_s \delta_{ij}$  eşitlikleri sağlanır. Sunulan tüm sonuçlar için her biri birbirinden bağımsız geliş açısı, sinyal ve gürültü gerçeklemesinden oluşan 10,000 Monte Carlo iterasyonu yapılmıştır.

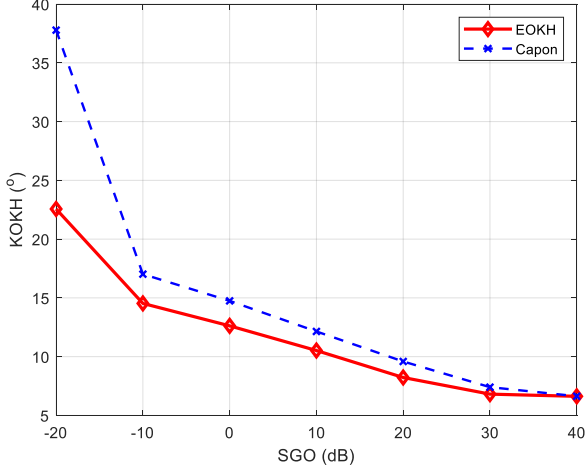
Benzetimler için, yarım dalga boyu ( $\lambda/2$ ) aralıklarla dizilmiş  $M = 10$  elemanlı bir düzgün doğrusal anten dizisi kullanılmıştır. Izgara nokta sayısı  $L = 200$  olarak seçilmiş olup,  $T = 100$  zaman adımı kullanılarak geliş açısı  $20^\circ$  ve  $160^\circ$  arasında değişen  $K = 1$  hedef için sinyal gürültü oranı  $\text{SGO} = 10 \log P_s / \sigma_n^2$  şeklinde tanımlanmış ve Şekil 1'de sunulan sonuçlar elde edilmiştir. Şekil 1'den görüldüğü üzere, düşük SGO bölgesinde EOKH tabanlı teknik Capon huzmeleyicisinden çok daha yüksek başarımlar göstermektedir. Örneğin  $\text{SGO} = -20$  (dB) için EOKH tabanlı teknik kök

ortalama karesel hatası (KOKH) metriğinde  $10^\circ$ 'den daha az hata yaparken, Capon huzmeleyicisi  $50^\circ$  civarında hata yapmaktadır.



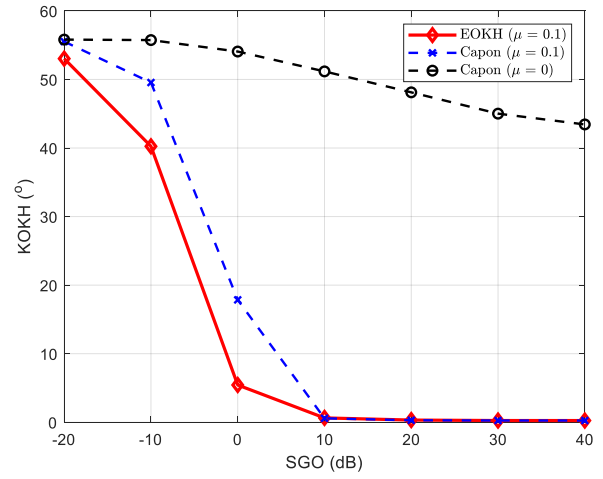
Şekil 1. Capon huzmeleyicisi ve EOKH tabanlı tekniğin farklı SGO'lar için KOKH başarımlarını karşılaştırması ( $K = 1, T = 100$ ).

Aynı güçle yayın yapan bir hedef daha senaryoya eklenerek hedef sayısı  $K = 2$ 'ye çıkarıldığında, aynı senaryo ve aynı SGO tanımı için Şekil 2'de sunulan sonuçlar elde edilmiştir. Bu kez tüm SGO'lar için EOKH tabanlı tekniğin sağladığı başarımların artışı açıkça görülmektedir.



Şekil 2. Capon huzmeleyicisi ve EOKH tabanlı tekniğin farklı SGO'lar için KOKH başarımlarını karşılaştırması ( $K = 2, T = 100$ ).

Son olarak, köşegen yüklemenin önemini vurgulamak üzere  $T = 2$  seçilmiş, köşegen yüklemenin yapıldığı ve yapılmadığı Capon huzmeleyici tekniği ile köşegen yüklemenin yapıldığı EOKH tabanlı teknik karşılaştırılmıştır.  $K = 1$  senaryosu için elde edilen sonuçlar Şekil 3'te verilmiştir. Görüldüğü üzere bu durumda da EOKH tabanlı teknik tüm SGO'lar için Capon huzmeleyicisinden daha düşük KOKH değerleri sergilemiştir. Yine aynı şekilden anlaşıldığı üzere, köşegen yükleme gibi gürbüzleştirici tekniklerin kullanımı  $\hat{\mathbf{R}}_{xx}^{-1}$  işleminin gerekli olduğu tekniklerde büyük önem arz etmektedir.



Şekil 3. Capon huzmeleyicisi ve EOKH tabanlı tekniğin farklı SGO'lar için KOKH başarımlarını karşılaştırması ( $K = 1, T = 2$ ).

## V. SONUÇLAR

Bu çalışmada, EOKH kıstası kullanılarak türetilen bir GAK tekniği ile Capon huzmeleyici arasındaki matematiksel ilişki gösterilmiştir. Bu matematiksel ilişki, sunulan EOKH tabanlı yöntemin aslında Capon huzmeleyicinin izlenen yayınların sinyal karakteristiğini de kullanan daha genel bir hâli olduğunu göstermektedir. Gelecek çalışmalarda, sinyal karakteristiğinin yalnızca kısmen (örneğin %10 hata ile) bilindiği durumlarda, sunulan tekniğin MUSIC ve Capon huzmeleyici gibi tekniklere göre başarımlarını incelenebilir.

## KAYNAKLAR

- [1] H. Krim ve M. Viberg, "Two decades of array signal processing research: the parametric approach", *IEEE Signal Process. Mag.*, cilt. 13, sf. 67–94, Temmuz 1996.
- [2] B. D. Van Veen ve K. M. Buckley, "Beamforming: a versatile approach to spatial filtering", *IEEE ASSP Mag.*, sf. 4–24, Nisan 1988.
- [3] J. Capon, "High resolution frequency-wavenumber spectrum analysis", *Proc. IEEE*, cilt. 57, sf. 1408–1418, Ağustos 1969.
- [4] Y. C. Eldar, A. Nehorai ve P. S. La Rosa, "A competitive mean-squared error approach to beamforming", *IEEE Trans. Signal Process.*, cilt. 55, no. 11, sf. 5143–5154, Kasım 2007.
- [5] S. Boyd ve L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2004.
- [6] R. G. Lorenz ve S. P. Boyd, "Robust minimum variance beamforming", *IEEE Trans. on Signal Process.*, cilt 53, no. 5, sf. 1684–1696, Mayıs 2005.
- [7] R. Schmidt, "Multiple emitter location and signal parameter estimation", *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, cilt. 34, no. 3, sf. 276–280, Mart 1986.
- [8] A. E. Gonnouni, M.M. Ramon, J.L.Rojo-Alvarez, G. Camps-Valls, A. R. Figueiras-Vidal ve C. G. Christodoulou, "A support vector machine music algorithm", *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, cilt. 60, no. 10, sf. 4901–4910, Ekim 2012.