

# Hızlı Seyrekleştirici Dönüşüm Öğrenme ile Görüntü Ters Evrişimi

## Image Deconvolution via Efficient Sparsifying Transform Learning

Fatih Çagatay Akyön<sup>1</sup>, Ulas Kamacı<sup>2</sup>, Figen S. Öktem<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü, Bilkent Üniversitesi, Ankara, Türkiye

<sup>2</sup>Dept. of Electrical and Computer Eng., Univ. of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois, USA

<sup>3</sup>Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye  
akyon@ee.bilkent.edu.tr, ukamaci2@illinois.edu, figeno@metu.edu.tr

**Özetçe**—Görüntü ters evrişimi görüntüleme sık karşılaşılan ters problemlerden biridir. Doğal görüntüler bir dönüşüm uzayında seyrek olarak ifade edilebildikleri için seyreklik önsellerinin bu problemleri etkili bir şekilde düzenlileştirebildikleri ve yüksek kaliteli yeniden oluşturmaya mümkün kaldıkları bilinmektedir. Bu çalışmada, görüntü ters evrişimi için dönüşüm öğrenmeye dayalı adaptif bir seyrek görüntü geri kazanım yaklaşımı geliştirilmektedir. Bu yaklaşımda adaptif olarak yama tabanlı bir seyrekleştirici dönüşüm öğrenilir ve eş zamanlı olarak gürültü, bulanık ölçümlerden görüntü geri kazanılır. Ortaya çıkan optimizasyon problemi kapalı formda ifade edilebilen ve hızlı bir şekilde hesaplanabilen adımlar içeren alması enküçültme (alternating minimization) algoritması kullanılarak çözülmektedir. Geliştirilen algoritmanın performansı, farklı optik bulanıklıkları ve gürültü seviyeleri için incelenmektedir. Sonuçlar, geliştirilen yöntemin toplam değişim (total variation) temelli yaklaşımla karşılaştırıldığında, görüntü geriçatım kalitesini artırdığını, aynı zamanda da hızlı olduğunu göstermektedir.

**Anahtar Kelimeler**—görüntü ters evrişimi, dönüşüm öğrenme, seyreklik tabanlı yeniden oluşturma, görüntüleme, alması enküçültme

**Abstract**—Image deconvolution is one of the most frequently encountered inverse problems in imaging. Since natural images can be modeled sparsely in some transform domain, sparsity priors have been shown to effectively regularize these problems and enable high-quality reconstructions. In this paper, we develop a data-adaptive sparse image reconstruction approach for image deconvolution based on transform learning. Our framework adaptively learns a patch-based sparsifying transform and simultaneously reconstructs the image from its noisy blurred measurement. This is achieved by solving the resulting optimization problem using an alternating minimization algorithm which has closed-form and efficient update steps. The performance of the developed algorithm is illustrated for an application in optical imaging by considering different optical blurs and noise levels. The results demonstrate that the developed method not only improves the reconstruction quality compared to the total-variation based approach, but also is fast.

**Keywords**—image deconvolution, transform learning, sparsity-based reconstruction, optical imaging, alternating minimization

### I. GİRİŞ

Görüntü ters evrişimi görüntüleme alanında sık karşılaşılan ters problemlerden biridir [1]–[4]. Doğal görüntüler bir dönüşüm uzayında yaklaşık olarak seyrek olduğu için, seyreklik önselleri bu kötü konumlanmış problemlerin düzenlileştirilmesinde önemli bir rol oynar [5], [6]. Ancak düzenlileştirme amacıyla  $\ell_0$  quasi-normu kullanıldığında, ortaya çıkan enküçültme problemi, NP zorluklu bir probleme dönüşür. Bu nedenle  $\ell_0$  quasi-normu genellikle  $\ell_1$  normu ile değiştirilerek, elde edilen problem standart konveks optimizasyon teknikleri veya sabit nokta (fixed-point) algoritmaları kullanılarak hızlı bir şekilde çözülebilir [7]–[11].

Daha önceki çalışmalarda sonlu farklar (finite differences), ayrık kosinüs ve dalgacık dönüşümleri gibi sabit analitik dönüşümler düzenlileştirme amaçlı kullanılırken [8]–[11], son zamanlarda seyreklik modelini adaptif bir şekilde geriçatım sırasında öğrenmenin daha etkili olduğu gözlenmiştir [12]–[14]. Sözlük öğrenmeye dayalı bu seyrek geriçatım yaklaşımları yüksek kalitede görüntü oluşturmaya imkan tanısa da [14]–[18], çevrimiçi sözlük öğrenmenin seyrek kodlama adımı yüksek maliyetli olmaktadır. Yakın zamanda, dönüşüm öğrenme, sözlük öğrenmeye alternatif bir yaklaşım olarak sunulmuş, gürültüden arındırma ve manyetik rezonans görüntüleme gibi uygulamalarda yüksek kaliteli ve hızlı görüntü geriçatımı sağladığı gösterilmiştir [19]–[21].

Bu çalışmada, ters evrişim problemine dönüşüm öğrenme yaklaşımı uygulanmakta, uyarlanır ve hızlı bir seyrekliğe dayalı ters evrişim yöntemi geliştirilmektedir. Önerilen yöntemde, seyrekleştirici dönüşümün bilinmediği varsayılır, böylece seyreklik modelinin görüntülenen nesneye göre adapte olmasına imkan tanınır. Yöntem adaptif bir biçimde yama tabanlı bir seyrekleştirici dönüşüm öğrenir ve eş zamanlı olarak gürültü, bulanık ölçümlerden orijinal görüntüyü yeniden oluşturur. Ortaya çıkan optimizasyon problemi kapalı formda ifade edilebilen ve hızlı bir şekilde hesaplanabilen adımlar içeren alması enküçültme (alternating minimization) algoritması kullanılarak çözülür.

Geliştirilen yöntemin performansı, örnek bir görüntüleme uygulaması için farklı optik bulanıklıklar ve gürültü seviyeleri

ele alınarak incelenmektedir. Sayısal benzetim sonuçları, geliştirilen adaptif seyreklik-tabanlı yöntemin, yaygın olarak kullanılan toplam değişim temelli yaklaşımla karşılaştırıldığında görüntü ters evrişim kalitesini artırdığını, aynı zamanda da hızlı olduğunu göstermektedir.

## II. GÖZLEM MODELİ

Gözlem modeli matris-vektör formunda aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$y = Hx + n, \quad (1)$$

Burada  $y \in \mathbb{R}^{N^2}$  sözlük sıralaması ile sıralanmış gürültülü bulanık ölçüm vektörü,  $x \in \mathbb{R}^{N^2}$  bilinmeyen orijinal görüntünün sözlük sıralaması ile sıralanmış ayrıklaştırılmış (discretized) şiddeti,  $n = [n_1^T \dots n_{N^2}^T]^T$  vektörü ise toplanır gürültü vektörüdür.  $n_i \sim N(0, \sigma^2)$  beyaz Gauss gürültüsünü göstermektedir. Ayrıca,  $H$  matrisi,  $N^2 \times N^2$  boyutlarındadır ve bulanıklık filtresi  $h$  ile olan evrişim işlemini gerçekleştirir. Örneğin, optik görüntüleme, bulanıklık filtresi optik sistemin iki boyutlu noktasal yayılım (point-spread) fonksiyonunu ifade eder.

Hızlı bir görüntü ters evrişim algoritması geliştirmek için, burada evrişimin dairesel olduğu varsayılmaktadır; böylece  $H$ , dairesel bloklara sahip bir blok-dairesel matris olur. Bu varsayım, gerçekte girdi sahnesinin ışına yapan kısmının (yani orijinal görüntünün) detektörde algılanan kısmına kıyasla nispeten küçük olduğu zaman geçerlidir. Daha spesifik olarak,  $N \times N$  pikseli bir ölçüm için, bulanıklık  $M \times M$  boyutunda ve girdi sahnesinin ışına yapan kısmı en fazla  $(N - M + 1) \times (N - M + 1)$  boyutlarında ise, dairesel evrişim doğrusal evrişime karşılık gelmektedir. Genellikle görüntüleme uygulamalarında bu durum geçerlidir.

## III. DÖNÜŞÜM ÖĞRENME İLE GÖRÜNTÜ TERS EVRİŞİMİ

Ters problemde amaç, gürültülü bulanık ölçüm  $y$ 'den, bilinmeyen görüntü  $x$ 'i elde etmektir. Bu, görüntü ters evrişim problemine karşılık gelir. Orijinal görüntüyle ilgili varolan önsel bilgileri kullanarak, bu kötü konumlanmış ters problem şu şekilde formüle edilebilir:

$$\min_x \nu \|y - Hx\|_2^2 + \mathcal{R}(x). \quad (2)$$

Bu problem, düzenlenleştirilmiş bir doğrusal en küçük kareler problemidir.  $\mathcal{R}(x)$  terimi,  $x$  bilinmeyeni ile ilgili önsel bilgilere dayanarak seçilmiş düzenlenleştirme fonksiyonudur. Enküçültme problemindeki ilk terim verinin model ile uyumunu ölçerken, ikinci terim yeniden oluşturulan görüntünün önsel bilgilerle uyumunu ölçer.  $\nu$  katsayısı sinyal-gürültü oranına göre bu iki terim arasındaki dengeyi belirler.

Doğal görüntüler bir dönüşüm uzayında seyrek olarak ifade edilebildiğinden, belirli bir seyrekleştirici dönüşüm  $D$  için  $\mathcal{R}(x) = \|Dx\|_0$  formunda bir düzenlenleştirme kullanılır, ve böylece bir dönüşüm uzayında seyreklik teşvik edilir. Ancak bu durumda enküçültme problemi, NP zorluklu bir probleme dönüştüğü için,  $\ell_0$  quasi-normu  $\ell_1$  normu ile değiştirilerek elde edilen problem standart konveks optimizasyon teknikleri veya sabit nokta (fixed-point) algoritmaları kullanılarak çözülebilir [8]–[11].  $\ell_1$ -norm düzenlenştirmesi ile ayrık gradyan işlecini kullanan toplam değişim (total variation) düzenlenştirmesi [7] de doğal görüntüler için sıkça tercih edilir.

Bu çalışmada, seyrekleştirici dönüşümün bilinmediği varsayılmaktadır. Bu, seyreklik modelinin görüntülenen nesneye göre adapte olmasını sağlar. Verilen ölçümden, adaptif olarak

seyrekleştirici bir dönüşüm uzayı öğrenmek, ve aynı anda ters evrişim problemini çözerek orijinal görüntüyü geriçatmak amaçlanmaktadır. Bu amaçla, şu yama tabanlı dönüşüm öğrenme içeren düzenlenleştirme kullanılır [21]:

$$\mathcal{R}(x) = \min_{W, B} \sum_{j=1}^{N^2} \|WP_j x - b_j\|_2^2 + \lambda Q(W) \text{ s.t. } \|B\|_0 \leq \beta$$

Bu düzenlenleştirme terimi kullanıldığında, aşağıdaki enküçültme probleminin çözülmesi gerekmektedir:

$$\begin{aligned} \min_{x, W, B} \quad & \nu \|y - Hx\|_2^2 + \sum_{j=1}^{N^2} \|WP_j x - b_j\|_2^2 + \lambda Q(W) \\ \text{s.t.} \quad & \|B\|_0 \leq \beta \end{aligned} \quad (3)$$

Burada,  $W \in \mathbb{C}^{L \times L}$  öğrenilecek yama tabanlı seyrekleştirici dönüşümdür.  $P_j \in \mathbb{R}^{L \times N^2}$  matrisi,  $x \in \mathbb{R}^{N^2}$  görüntüsünden  $\sqrt{L} \times \sqrt{L}$  boyutunda bir yama elde eder. Toplam  $N^2$  tane örtüşen yama kullanılır. Görüntünün  $j$ 'inci yaması için dönüşüm katsayılarını içeren seyrek kod,  $b_j \in \mathbb{C}^L$  ile gösterilir.  $B \in \mathbb{C}^{L \times N^2}$  seyrek kod matrisi, tüm seyrek kod vektörlerinin yatay olarak birleştirilmesiyle elde edilir; yani  $B = [b_1 | b_2 | \dots | b_{N^2}]$ . Bu durumda  $\|B\|_0 = \sum_{j=1}^{N^2} \|b_j\|_0$  tüm seyrek kod vektörlerindeki sıfırdan farklı elemanların toplam sayısıdır ve  $\beta$  en yüksek seyreklik seviyesini belirler.  $Q(W) = 0.5 \|W\|_F^2 - \log |\det W|$  terimi ise dönüşümün apaçık (trivial) sonuçlara ulaşmasını ve kötü konumlanmasını engelleyen düzenlenştiricidir [21].

Bu problem, üç güncelleme adımı içeren bir sıralı enküçültme (alternating minimization) algoritması kullanılarak çözümlür. Her güncelleme adımında (3)'teki enküçültme problemi tek bir  $x$ ,  $W$ , veya  $B$  değişkeni için diğer iki değişken sabit tutularak çözümlür. Bu güncelleme adımlarının her birinin hızlı bir şekilde hesaplanması mümkündür.

Görüntü güncelleme adımı için şu en küçük kareler probleminin  $x$  için çözülmesi gerekir [21]:

$$\min_x \nu \|y - Hx\|_2^2 + \sum_{j=1}^{N^2} \|WP_j x - b_j\|_2^2 \quad (4)$$

Bu problemin çözümü tarafından sağlanan normal denklem şu şekildedir:

$$(\nu H^H H + G)x = c + \nu H^H y. \quad (5)$$

Burada  $G = \sum_{j=1}^{N^2} P_j^T W^H W P_j$  olan matris ve  $c = \sum_{j=1}^{N^2} P_j^T W^H b_j$  olan vektördür. Bu durumda, görüntü güncelleme adımının çözümü şu şekildedir:

$$x = (\nu H^H H + G)^{-1} (c + \nu H^H y) \quad (6)$$

Bu formdaki çözümlerin  $H$  ve  $G$  matrislerinin özelliklerinden yararlanılarak FFT ile hızlı bir şekilde hesaplanabileceği bilinmektedir [10]. Buradaki  $G$  matrisi, dairesel bloklara sahip bir blok dairesel (BCCB) matristir, ve DFT matrisi  $F$  ile köşegenleştirilebilir [21]. Yani,  $\Gamma$  köşegen elemanları  $G$ 'nin ilk sütununun DFT'si alınarak hesaplanabilen bir köşegen matrisken,  $G = F^H \Gamma F$  sağlanmaktadır. Ayrıca  $H$  de bir BCCB matrisi olduğu için, yine DFT matrisi ile köşegenleştirilebilir. Köşegen matrisi  $\Lambda$ 'nın köşegeni de  $H$  matrisinin ilk sütununun DFT'si alınarak hesaplanabilir.

Böylece (6) denklemindeki çözüm,  $A = \nu H^H H + G$  matrisinin özel yapısı kullanılarak hızlı bir şekilde elde edilebilir, çünkü  $A$  matrisi DFT matrisi kullanılarak köşegenleştirilebilir:

$$A = \nu F^H \Lambda^H F F^H \Lambda F + F^H \Gamma F = F^H \Sigma F \quad (7)$$

Burada  $\Sigma = \nu\Lambda^H\Lambda + \Gamma$  geçerlidir.  $A$ 'nın tersi  $F^{-1}\Sigma^{-1}F$  ile verildiğinden görüntü güncelleme adımının çözümü şu şekilde hızlı bir şekilde hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} x &= F^{-1}\Sigma^{-1}F(c + \nu H^H y) = F^{-1}\Sigma^{-1}(Fc + \nu FH^H y) \\ &= F^{-1}\Sigma^{-1}(Fc + \nu\Lambda^H Fy) \end{aligned} \quad (8)$$

Burada,  $Fc$  ve  $Fy$ , FFT kullanılarak hızlı bir şekilde hesaplanabilir. Ayrıca, diğer matrislerin de köşegen matris olması hesaplamayı daha da kolaylaştırmaktadır. Hızlı görüntü güncelleme adımı şu şekilde özetlenebilir:

#### Algorithm 1 Hızlı Görüntü Güncelleme Adımı

**Girdiler:**  $y$  - ölçüm,  $h$  - bulanıklık filtresi,  $W$  - güncel uyarlanmış dönüşüm matrisi,  $b_j$  - güncel seyrek kod vektörleri

**Çıktılar:**  $x$  - güncel görüntü vektörü

- 1:  $h$ 'nin FFT'si hesaplanarak  $\Lambda$ 'nın köşegeni elde edilir..
- 2:  $G$ 'nin ilk sütununun FFT'si alınarak  $\Gamma$ 'nin köşegeni elde edilir.
- 3:  $\Sigma$ 'nin köşegeni hesaplanır.
- 4: İki boyutta  $c = \sum_{j=1}^{N^2} P_j^T W^H b_j$  hesaplanır, sonra  $\text{FFT}(c)$  ile  $Fc$  elde edilir.
- 5:  $\text{FFT}(y)$  ile  $Fy$  elde edilir.
- 6:  $Fc + \nu\Lambda^H Fy$  hesaplanır.
- 7:  $x$  görüntüsü  $\text{IFFT}(\Sigma^{-1}(Fc + \nu\Lambda^H Fy))$  ile güncellenir.

Dönüşüm öğrenme ve seyrek kodlama adımları [21]'daki adımlarla aynıdır. Dönüşüm öğrenme adımındaki enküçültme problemi aşağıdaki gibi yazıldığında tekil değer ayrıştırma (singular value decomposition) [19] dayalı kapalı formda bir çözüm elde edilebilir:

$$\min_W \|WX - B\|_F^2 + 0.5\lambda\|W\|_F^2 - \lambda \log |\det W| \quad (9)$$

Burada  $X \in \mathbb{R}^{L \times N^2}$  matrisinin sütunları  $P_j x$  vektörlerinden oluşmaktadır. Ayrık kodlama adımı ise şu problemin çözülmesini gerektirir:

$$\min_B \|WX - B\|_F^2 \quad \text{s.t.} \quad \|B\|_0 \leq \beta \quad (10)$$

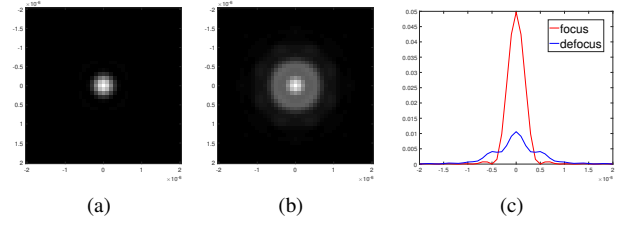
Bunun çözümü  $WX$ 'in en büyük  $\beta$  elemanının  $B$ 'ye atanması ve diğer elemanların sıfıra eşitlenmesi ile hızlı bir şekilde elde edilir.

#### IV. SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde, sunulan ters evrişim yönteminin optik bulanıklığı giderme performansı gösterilmektedir. Bu amaçla, NASA'nın Atmosferik Görüntüleme Düzeneği (Atmospheric Imaging Assembly) [22] ile benzer özellikte basit bir teleskop sistemi ele alınmıştır. Görüntüleme elemanının çapı  $D = 20$  cm ve etkin odak uzaklığı 4.125 m'dir. Amaç bir astrofizik objesini  $\lambda = 19.3$  nm dalgaboyunda görüntülemektir.

Ters evrişim sonuçları iki farklı durum için sunulmaktadır. İlk durumda görüntüleme sisteminin odağından görüntü alınmakta, ikinci durumda ise odak noktasından 2.5 odak derinliği (depth of focus) uzakta görüntü alınmaktadır. İkinci durum, ölçüm düzleminde kaymadan kaynaklı olarak oluşan odak-dışı bulanıklığı modellemektedir. İki durumda da, detektörün piksel boyutu, Nyquist örnekleme miktarının yarısı olarak seçilmiştir. Bu durumlar için sistem noktasal yayılım fonksiyonları bilinen görüntüleme modelleri [23] kullanılarak hesaplanmıştır ve Fig. 1'de gösterilmektedir. Her bulanıklık filtresinin boyutu  $61 \times 61$ 'dir ancak bu fonksiyonların enerjisinin büyük bir kısmı, sırasıyla odaklanmış ve odak dışı durumlar için, ortadaki  $13 \times 13$  ve  $31 \times 31$ 'lik kısımdadır.

Görüntüleme sistemi için girdi olarak  $128 \times 128$  boyutunda bir güneş görüntüsü kullanılmaktadır. Denklem (1)'deki ölçüm modeli kullanılarak, 30, 40 ve 50 dB SNR değerleri için



Şekil 1: Sistemin odaktaki noktasal yayılım fonsiyonu (a), 2.5 odak derinliği uzaktaki yayılım fonsiyonu (b), iki fonksiyonun hizalanmış ara kesitleri (c).

hem odaklanmış hem de odaklanmamış durumlar için ölçüm setleri oluşturulmuştur. Figür 2 ve 3, sırasıyla 30 ve 40 dB SNR seviyeleri için örnek bulanık görüntüleri ve geliştirilen öğrenme tabanlı yöntem ile yeniden oluşturulan görüntüleri göstermektedir. Ayrıca, orjinal görüntü ile odaklı durum için adaptif olarak öğrenilmiş dönüşümler de gösterilmektedir.

Dönüşüm öğrenme tabanlı yöntemin performansı, klasik toplam değişim (TV) tabanlı yeniden oluşturma yöntemi [7] ile karşılaştırılmıştır. TV tabanlı yöntem ile yeniden oluşturulan görüntüler de, Figür 2 ve 3'te karşılaştırma amaçlı gösterilmektedir. TV tabanlı ve dönüşüm öğrenme tabanlı yöntemler için ortalama doruk sinyal gürültü oranları (PSNR) sırasıyla Tablo 1 ve 2'de odaklı ve odaklanmamış durumlar için verilmektedir.

Sonuçlar, TV tabanlı yöntemle göre yeniden oluşturma kalitesinde PSNR cinsinden 1dB'yi aşan iyileşme göstermektedir. Ayrıca geliştirilen seyrekliğe dayalı adaptif ters evrişim yöntemi, hızlı güncelleme adımları sayesinde benzer hıza sahiptir. Bu tür adaptif görüntü oluşturma yaklaşımları ile, gelecek çalışmaların konusu olan çok-çerçeve görüntü ters evrişimi ve sıkıştırılmış algılama içeren durumlar için, görüntü kalitesinde daha büyük iyileşmeler sağlanması beklenmektedir.

TABLO I: Odaklanmış durum için toplam değişim ve dönüşüm öğrenme tabanlı yöntemlerin farklı SNRlarda ortalama PSNR (dB) değerleri.

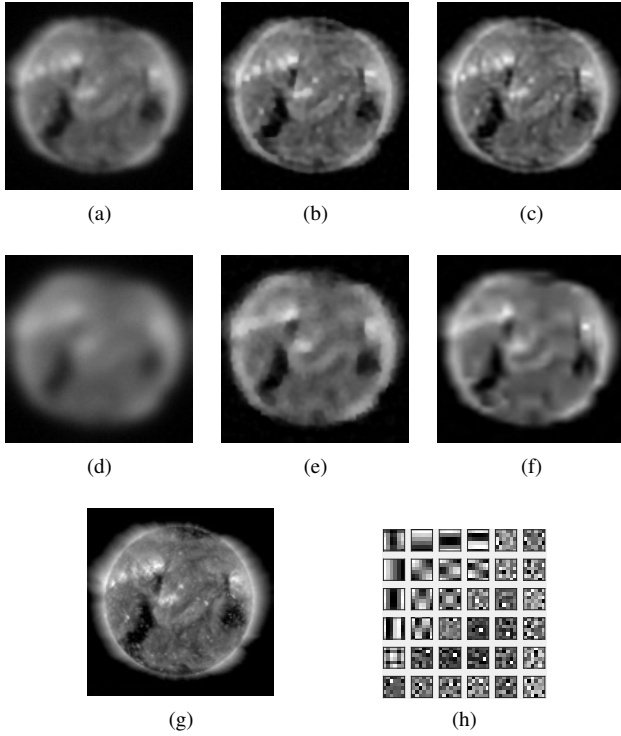
SNR (dB)	Toplam Değişim	Dönüşüm Öğrenme
30	32.06	32.83
40	33.06	33.89
50	33.64	34.50

TABLO II: Odaklanmamış durum için toplam değişim ve dönüşüm öğrenme tabanlı yöntemlerin farklı SNRlarda ortalama PSNR (dB) değerleri.

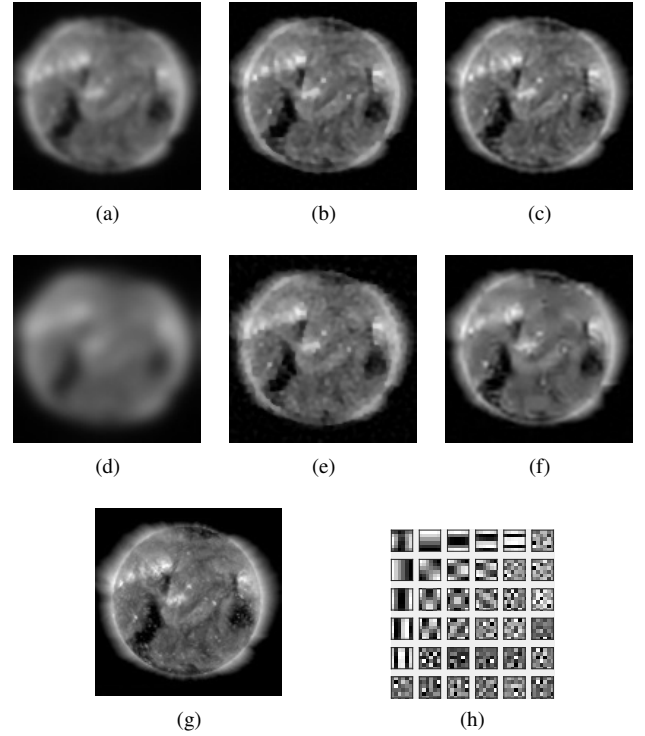
SNR (dB)	Toplam Değişim	Dönüşüm Öğrenme
30	27.48	28.10
40	29.34	30.37
50	31.67	32.74

#### KAYNAKLAR

- [1] D. L. Snyder, T. J. Schulz, and J. O'Sullivan, "Deblurring subject to nonnegativity constraints," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 40, pp. 43–50, 1992.
- [2] D. Kundur and D. Hatzinakos, "Blind image deconvolution," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 13, pp. 43–64, 1996.
- [3] A. K. Katsaggelos, *Digital Image Restoration*, Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1991.



Şekil 2: Odaklı ve odaklanmamış durumlar için gürültülü (30 dB SNR) ölçümler (a)-(d), odaklı ve odaklanmamış durumlar için toplam değişim yaklaşımı ile elde edilen görüntüler (b)-(e), odaklı ve odaklanmamış durumlar için dönüşüm öğrenme yaklaşımı ile elde edilen görüntüler (c)-(f), orijinal görüntü (g), odaklanmış durum için öğrenilen dönüşüm (h).



Şekil 3: Odaklı ve odaklanmamış durumlar için gürültülü (40 dB SNR) ölçümler (a)-(d), odaklı ve odaklanmamış durumlar için toplam değişim yaklaşımı ile elde edilen görüntüler (b)-(e), odaklı ve odaklanmamış durumlar için dönüşüm öğrenme yaklaşımı ile elde edilen görüntüler (c)-(f), orijinal görüntü (g), odaklanmış durum için öğrenilen dönüşüm (h).

[4] J. S. Lim, *Two-dimensional signal and image processing*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1990.

[5] M. Elad, M. A.T. Figueiredo, and Y. Ma, "On the role of sparse and redundant representations in image processing," *Proceedings of the IEEE*, vol. 98, no. 6, pp. 972–982, 2010.

[6] D. Krishnan and R. Fergus, "Fast image deconvolution using hyper-laplacian priors," in *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2009, pp. 1033–1041.

[7] C. R. Vogel and M. E. Oman, "Fast, robust total variation-based reconstruction of noisy, blurred images," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 7, no. 6, pp. 813–824, 1998.

[8] A. Beck and M. Teboulle, "Gradient-based algorithms with applications to signal recovery," *Convex optimization in signal processing and communications*, pp. 42–88, 2009.

[9] J. A. Tropp and S. J. Wright, "Computational methods for sparse solution of linear inverse problems," *Proceedings of the IEEE*, vol. 98, no. 6, pp. 948–958, 2010.

[10] M. V. Afonso, J. M. Bioucas-Dias, and M. A. T. Figueiredo, "Fast image recovery using variable splitting and constrained optimization," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 19, no. 9, pp. 2345–2356, 2010.

[11] M. V. Afonso, J. M. Bioucas-Dias, and M. A. T. Figueiredo, "An augmented Lagrangian approach to the constrained optimization formulation of imaging inverse problems," *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 20, no. 3, pp. 681–695, 2011.

[12] S. Ravishanker and Y. Bresler, "MR image reconstruction from highly undersampled k-space data by dictionary learning," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 30, no. 5, pp. 1028–1041, 2011.

[13] W. Dong, X. Li, L. Zhang, and G. Shi, "Sparsity-based image denoising via dictionary learning and structural clustering," in *2011 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. IEEE, 2011, pp. 457–464.

[14] H. Yang, M. Zhu, X. Wu, Z. Zhang, and H. Huang, "Dictionary learning approach for image deconvolution with variance estimation," *Appl. Opt.*, vol. 53, no. 25, pp. 5677–5684, Sep 2014.

[15] W. Dong, L. Zhang, G. Shi, and X. Wu, "Image deblurring and super-resolution by adaptive sparse domain selection and adaptive regularization," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 20, no. 7, pp. 1838–1857, 2011.

[16] H. Zhang, J. Yang, Y. Zhang, and T. S. Huang, "Sparse representation based blind image deblurring," in *2011 IEEE International Conference on Multimedia and Expo (ICME)*. IEEE, 2011, pp. 1–6.

[17] W. Dong, L. Zhang, G. Shi, and X. Li, "Nonlocally centralized sparse representation for image restoration," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 22, no. 4, pp. 1620–1630, 2013.

[18] J. Zhang, D. Zhao, and W. Gao, "Group-based sparse representation for image restoration," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 23, no. 8, pp. 3336–3351, 2014.

[19] S. Ravishanker and Y. Bresler, "Learning sparsifying transforms," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 61, no. 5, pp. 1072–1086, 2013.

[20] S. Ravishanker and Y. Bresler, " $\ell_0$  sparsifying transform learning with efficient optimal updates and convergence guarantees," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 63, no. 9, pp. 2389–2404, 2014.

[21] S. Ravishanker and Y. Bresler, "Efficient blind compressed sensing using sparsifying transforms with convergence guarantees and application to magnetic resonance imaging," *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 8, no. 4, pp. 2519–2557, 2015.

[22] J. R. Lemen, A. M. Title, D. J. Akin, P. F. Boerner, C. Chou, J. F. Drake, D. W. Duncan, C. G. Edwards, F. M. Friedlaender, G. F. Heyman, et al., "The Atmospheric Imaging Assembly (AIA) on the Solar Dynamics Observatory (SDO)," *Solar Physics*, pp. 1–24, 2011.

[23] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, Roberts, Englewood, Colorado, 3rd edition, 2005.