Yapısal Veri Belirsizlikleri Altında Yarışmacı Doğrusal MMSE Kestirim

Competitive Linear MMSE Estimation Under Structured Data Uncertainties

N. Denizcan Vanlı, Muhammed Ö. Sayın, Süleyman S. Kozat

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü

Bilkent Üniversitesi

{vanli, sayin, kozat}@ee.bilkent.edu.tr

Özetçe —Bu bildiride, yapısal veri belirsizlikleri altında doğrusal kestirim problemi incelenmektedir. Maliyet fonksiyonu olarak ortalama karesel hata (MSE) düşünülmüştür ve sınırlı belirsizlikler altında gürbüz bir algoritma önerilmiştir. Sunulan yöntem yarışmacı algoritma yapısına sahiptir ve bu yapıya ulaşmak için doğrusal kestiricinin performansı, bilinmeyen veri belirsizliklerine göre ayarlanmış doğrusal en küçük MSE (MMSE) kestiricisinin performansına göreceli olarak tanımlanmıştır. Daha sonra, bu göreceli performans ölçütünü en kötü durumdaki sistem modeline göre en küçükten doğrusal kestirici bulunmuştur. Bu yarışmacı kestiriciyi bulmak için çözülmesi gereken problemin yarı-kesin programlama (SDP) problemi olarak düşünülebileceği gösterilmiştir. Ayrıca, teorik sonuçları izah etmek için sayısal örnekler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler—yarışmacı, gürbüz, doğrusal kestirim, veri belirsizlikleri.

Abstract—In this paper, we consider the linear estimation problem under structured data uncertainties. A robust algorithm is presented under bounded uncertainties under the mean square error (MSE) criterion. The performance of the linear estimator is defined relative to the performance of the linear minimum MSE (MMSE) estimator tuned to the underlying unknown data uncertainties, i.e., the introduced algorithm has a competitive framework. Then, using this relative performance measure, we find the estimator that minimizes this cost for the worst-case system model. We show that finding this estimator can equivalently be cast as a semidefinite programming (SDP) problem. Numerical examples are provided to illustrate the theoretical results.

Keywords—competitive, robust, linear estimation, data uncertainties.

I. GİRİŞ

Bu bildiride, yapısal veri belirsizlikleri altında doğrusal kestirim problemi incelenmektedir [1]. İlinti matrisi bilinen ve istenen bir veri vektörü doğrusal bir sistemden geçirilmektedir. Bu sistemin çıkışı ilinti matrisi bilinen toplanır gürültü tarafından bozulmaktadır. Bu çerçevede doğrusal sistemin gerçek değeri bilinmiyor olsa bile bu sistemin bir kestirimi verilmiş veya üretilmiştir. Ancak, bu kestirim yüksek olasılıkla belirsizlikler içermektedir. Dolayısıyla kestirilen sistemi doğrudan kullanmak kestiricinin performansını önemli ölçüde düşürebilir

[2]. Bu sebepten ötürü, bu doğrudan yöntem yerine daha gürbüz yöntemlerin kullanımı literatürde önerilmiştir [1]–[5].

Bu çerçevede, yaygın olarak kullanılan kestirim yöntemlerinden biri en kötü durumdaki sistem performansını eniyileştirmek [6]. Benzer şekilde, [4]’te H^∞ kriteri doğrusal kestirim problemine uygulanmış ve giriş sinyalinin çıkış sinyaline en yüksek enerji kazanımı en küçültülmüştür. Bu bildiride ise sistemin performansı, bilinmeyen veri belirsizliklerine göre ayarlanmış doğrusal MMSE kestiricisinin performansına göreceli olarak tanımlanmıştır. Bu çerçevede, enerji kazanımını en küçültmek veya nihai performans ölçütünün en kötü durumdaki değerini eniyileştirmek yerine, bu bildiride, yukarıda tanımlanmış olan göreceli performans ölçütü en küçültülmüştür.

Benzer göreceli performans tanımları literatürdeki çoğu makalede mevcuttur. [1]’de belirsizliklerin giriş ve gürültü ilinti matrislerinde olduğu düşünülmüştür ve doğrusal sistem modelinin bilindiği varsayılmıştır. [2]’de ise belirsizliklerin doğrusal sistem modelinde olduğu düşünülmüş ve giriş ve gürültü ilinti matrislerinin bilindiği varsayılmıştır. Bu bildiride düşünülen problem tanımı ise [2]’de düşünülen problem tanımına benzerlik göstermekle beraber, bildiride ek olarak belirsizliklerin yapısal bir formda olduğu düşünülmüştür.

Yapısal veri belirsizlikleri altında, doğrudan kestirilen doğrusal sistem modelinin kullanılması çoğu durumda kabul edilemez sonuçlar vermektedir [5]. Öte taraftan, en küçük-en büyük ilkesine göre elde edilen doğrusal sistem modelleri ise oldukça kötümser belirsizlik değerlerini düşünerek karamsar ancak gürbüz bir performans sergilemektedir [6]. Bu bildiride önerilen yöntem ise bu iki uç yöntemin performansları arasında ödünleşim gürbüzaktır.

Bildiride sunulan doğrusal kestirim problemi, birçok sayısal iletişim sistemi senaryolarında gözlemlenebilmektedir [1], [2], [4]. Bu senaryolarda (kanal denkleştirme) istenen sinyalin ve toplanır gürültünün istatistikleri genellikle çıkış sinyalinin istatistiklerinden kestirilebilmektedir ve genellikle bu değerlerin bilindiği varsayılmaktadır. Benzer şekilde, doğrusal sistem modeli de literatürdeki herhangi bir kestirim algoritması kullanarak kestirilebilir. Bu bildiride önerilen algoritma ise bu kestirimleri ve kestirimlerin üzerindeki belirsizlik üst sınırlarını düşünerek performans olarak gürbüz bir kestirim yöntemi sunmaktadır. Ayrıca, bildiride önerilen

yöntemin SDP problemi olarak da yapılandırılabilirliği gösterilmiştir. Dolayısıyla, SDP problemlerini çözmek için gereken hesaplama karmaşıklığı düşünüldüğünde, önerilen yöntemin gerçek zamanlı uygulamalar için rahatlıkla kullanılabileceği söylenebilir [1].

Bildiri şu şekilde organize edilmiştir: Bölüm 2’de sistem modeli detaylı olarak anlatılmış ve yarışmacı problem tanımlanmıştır. Bölüm 3’te bu yarışmacı problemi çözen SDP algoritması sunulmuştur. Bölüm 4’te önerilen algoritmanın performansını literatürdeki diğer algoritmalarla karşılaştırılmıştır. Son olarak, Bölüm 5’te bildiri sonuçlandırılmıştır.

II. GÖSTERİM VE PROBLEM TANIMI

Bu bildiri, tüm vektörler sütun vektörleridir ve küçük koyu harflerle gösterilmektedir. Matrisler ise büyük koyu harflerle gösterilmektedir. Herhangi bir $\mathbf{x}$ vektörü için, $\|\mathbf{x}\| = \mathbf{x}^H \mathbf{x}$, ℓ^2 normudur, $\mathbf{x}^H$ vektörü $\mathbf{x}$ ’in eşlenik devriği ve $\mathbf{x}^T$ ise normal devriğidir. Herhangi bir $\mathbf{H}$ matrisi için $\text{Tr}\{\mathbf{H}\}$ matrisin izi, $\|\mathbf{H}\|$ ise matrisin spektral normudur. $\mathbf{H} > 0$ pozitif kesin matrisi, $\mathbf{H} \geq 0$ ise pozitif yarı-kesin matrisi simgelemektedir. $\mathbf{I}$ ve $\mathbf{0}$ sırasıyla uygun boyutlu birim matrisi ve sıfır matrisini simgelemektedir. $\otimes$ sembolü ise Kronecker çarpımını simgelemektedir.

Sistem modeli şu şekilde tanımlanmıştır: Bilinmeyen ve istenen giriş vektörü $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ bilinmeyen bir doğrusal sistem olan $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ üzerinden geçirilmiştir. Sistemin çıktısı ise eklenir gürültü, $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^m$, tarafından bozularak aşağıdaki çıkış sinyali gözlemlenmiştir:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w}.$$

Burada, $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{w}$ vektörlerinin birbirinden bağımsız, sıfır ortalamalı ve sırasıyla $\mathbf{R}_x$ ve $\mathbf{R}_w$ ilinti matrisli olduğu varsayılmıştır. Kanal matrisi $\mathbf{H}$ bilinmese de bu matrisin bir kestirimi olan $\mathbf{H}_0$ bilinmektedir. Ancak, bu kestirim birçok pratik durumda tam olarak doğru değildir ve üzerinde bir belirsizlik vardır:

$$\Delta\mathbf{H} = \mathbf{H} - \mathbf{H}_0.$$

Bu belirsizliğin ise yapısal bir formda ifade edilebileceği varsayılmıştır. Bu çerçevede p farklı yapı matrisi $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_p$ olduğu düşünülürse, $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \dots, \mu_p]^T$ katışım parametreleri ile yukarıda ifade edilen belirsizlik yapı matrislerinin doğrusal birleşimi olarak ifade edilebilir:

$$\Delta\mathbf{H} = \sum_{i=1}^p \mu_i \mathbf{H}_i. \quad (1)$$

Burada, belirsizlik katsayılarının üstten sınırlı olduğu $\|\boldsymbol{\mu}\| \leq \alpha$, $\alpha > 0$, ve bu üst sınırın bilindiği varsayılmıştır.

Çıktı vektörü olan $\mathbf{y}$ gözlemlendikten sonra giriş vektörü olan $\mathbf{x}$ şu şekilde oluşturulabilir:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{G}\mathbf{y}.$$

Burada, $\mathbf{G}$ matrisi doğrusal bir kestiriciyi simgelemektedir. Herhangi bir doğrusal kestirici için kestirim hatası aşağıdaki şekilde bulunur:

$$f(\mathbf{G}; \boldsymbol{\mu}) \triangleq E \left[\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2 \right] = \text{Tr} \left\{ \mathbf{G}\mathbf{R}_w\mathbf{G}^H \right\} + \text{Tr} \left\{ \mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}} (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{H})^H (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{H}) \mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (2)$$

Bu çerçevede literatürde yaygın olarak kullanılan yöntemlerden biri $f(\mathbf{H})$ fonksiyonunu enbüyüten $\boldsymbol{\mu}$ değeri için, yine aynı maliyet fonksiyonunu enküçüten doğrusal kestirim matrisini hesaplamaktır. Matematiksel olarak,

$$\min_{\mathbf{G}} \max_{\boldsymbol{\mu}} f(\mathbf{G}; \boldsymbol{\mu}) \quad (3)$$

problemine çözüm aramaktır. Ancak, daha önce de bahsedildiği gibi bu yöntem en kötü durumlarda gürbüz bir performans üretse de, gerçek örneklerde bu yöntemin karamsar yapısı istenmeyen sonuçlar üretebilmektedir [1]. Bu sebepten ötürü, aşağıdaki yarışmacı performans ölçütü tanımlanmıştır:

$$\min_{\mathbf{G}} \max_{\boldsymbol{\mu}} \left\{ \underbrace{f(\mathbf{G}; \boldsymbol{\mu}) - \min_{\mathbf{G}'} f(\mathbf{G}'; \boldsymbol{\mu})}_{\triangleq \mathcal{R}(\mathbf{G}; \boldsymbol{\mu})} \right\}. \quad (4)$$

Bu performans ölçütü ile (3)’te tanımlanan karamsar problem tanımı ile doğrudan kanal kestirimi $\mathbf{H}_0$ ’a bağlı olan iyimser yöntem arasında bir ödünleşim gürbüzaktır.

III. YARIŞMACI DOĞRUSAL KESTİRİM

Bu bölümde, (4)’te tanımlanan maliyet fonksiyonunu enküçüten kestirim matrisi hesaplanmaktadır. (2)’de verilen maliyet fonksiyonunu enküçüten (MMSE) doğrusal kestirim matrisi $\mathbf{G}$, katışım parametreleri $\boldsymbol{\mu}$ biliniyorken aşağıdaki gibi bulunur:

$$\mathbf{G}_{\text{MMSE}}(\boldsymbol{\mu}) = \left(\mathbf{R}_x^{-1} + \mathbf{H}^H \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^H \mathbf{R}_w^{-1},$$

ve bu MMSE kestirim matrisinin ortalama karesel hatası

$$f(\boldsymbol{\mu}) \triangleq \text{Tr} \left\{ \left(\mathbf{R}_x^{-1} + \mathbf{H}^H \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{H} \right)^{-1} \right\} \quad (5)$$

olarak hesaplanır.

Dolayısıyla, (4)’teki maliyet fonksiyonu (2) ve (5) düşünülerek, aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\mathcal{R}(\mathbf{G}; \boldsymbol{\mu}) = \text{Tr} \left\{ \mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}} (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{H})^H (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{H}) \mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}} \right\} + \text{Tr} \left\{ \mathbf{G}\mathbf{R}_w\mathbf{G}^H \right\} - \text{Tr} \left\{ (\mathbf{R}_x^{-1} + \mathbf{H}^H \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{H})^{-1} \right\}.$$

Yukarıdaki ifadede son terimi birinci dereceden Taylor açılımı ile $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ etrafında yakınlılaştırırsak

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{G}; \boldsymbol{\mu}) &\approx \text{Tr} \left\{ \mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}} (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{H})^H (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{H}) \mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &+ \text{Tr} \left\{ \mathbf{G}\mathbf{R}_w\mathbf{G}^H \right\} - \kappa - \Re \left\{ \text{Tr} \left\{ \left\{ \nabla_{\boldsymbol{\mu}} f(\boldsymbol{\mu}) \right|_{\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0}} \right\}^H \boldsymbol{\mu} \right\} \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ \mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}} (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{H})^H (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{H}) \mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &+ \text{Tr} \left\{ \mathbf{G}\mathbf{R}_w\mathbf{G}^H \right\} - \kappa - \boldsymbol{\beta}^H \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^H \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (6)$$

bulunur. Burada, $\kappa \triangleq f(\mathbf{0})$, $\boldsymbol{\beta} \triangleq [\beta_1, \dots, \beta_p]^T$, $\beta_i \triangleq \text{Tr} \{ \mathbf{B}^H \mathbf{H}_i \}$ olarak tanımlanmış ve

$$\mathbf{B} \triangleq \nabla_{\mathbf{H}} f(\boldsymbol{\mu})|_{\boldsymbol{\mu}=\mathbf{0}} = -\mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{H}_0 \left(\mathbf{R}_x^{-1} + \mathbf{H}_0^H \mathbf{R}_w^{-1} \mathbf{H}_0 \right)^{-2}$$

şeklinde hesaplanmıştır [2]. $\boldsymbol{\beta}$ vektörünün değerleri zincir kuralı uygulanarak yukarıdaki şekilde bulunmuştur.

Teorem: İstenen ve bilinmeyen sıfır ortalamalı ve $\mathbf{R}_x$ ilinti matrisli $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ giriş vektörü bilinmeyen bir doğrusal sistem olan $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ üzerinden $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w}$ modeliyle gözlemleniyor olsun. Ayrıca, $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^m$ eklenir gürültü vektörü sıfır ortalamalı ve $\mathbf{R}_w$ ilinti matrisine sahip ve $\mathbf{x}$ 'ten bağımsız bir vektör olsun. Verilen bir kanal kestirimi $\mathbf{H}_0$ ve yapısal matrisler $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_p$ için (1)'deki yapısal modele göre ve (6)'daki yakınlığa göre

$$\min_{\mathbf{G}} \max_{\boldsymbol{\mu}} \mathcal{R}(\mathbf{G}; \boldsymbol{\mu}), \text{ öyle ki } \|\boldsymbol{\mu}\| \leq \alpha$$

problemi aşağıdaki SDP problemi şeklinde yazılabilir:

$$\begin{aligned} & \min_{t, \mathbf{G}, \lambda, \mathbf{M}} t \\ & \text{öyle ki} \\ & \text{Tr}\{\mathbf{M}\} \leq t, \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{M} + (\kappa/N - \lambda)\mathbf{I} & \mathbf{G} & \left\{(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{H}_0)\mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}}\right\}^H & \alpha/N\mathbf{F}^H \\ \mathbf{G}^H & \mathbf{R}_w^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{H}_0)\mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \alpha/N\mathbf{F} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned}$$

Burada, $\mathbf{F} \triangleq \boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{I}$ olarak tanımlanmıştır.

Yukarıdaki teorem (4)'te tanımlanan problemin yukarıda tanımlanan şekilde bir SDP problemine dönüştürülebileceğini göstermektedir. Bu sayede, önerilen yöntemin çözümü etkili bir biçimde yapılabilmektedir. Dolayısıyla, önerilen algoritma gerçek hayat problemlerinde rahatlıkla kullanılabilir.

İspat: (6)'daki problem aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\min_{\mathbf{G}} \max_{\boldsymbol{\mu}} \mathcal{R}(\mathbf{G}; \boldsymbol{\mu}) = \min_{t, \mathbf{G}} t,$$

öyle ki

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left\{ \mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}} (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{H})^H (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{H}) \mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}} + \mathbf{G}\mathbf{R}_w\mathbf{G}^H \right. \\ & \quad \left. - \left(\kappa + \boldsymbol{\beta}^H \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}^H \boldsymbol{\beta} \right) \mathbf{I} \right\} \leq t, \|\boldsymbol{\mu}\| \leq \alpha. \end{aligned} \quad (7)$$

Bir ara matris $\mathbf{M} = \mathbf{M}^H \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tanımlayarak (7)'deki kısıtı aşağıdaki şekilde tekrar yazabiliriz:

$$\text{Tr}\{\mathbf{M}\} \leq t,$$

öyle ki

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}} (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{H})^H (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{H}) \mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}} + \mathbf{G}\mathbf{R}_w\mathbf{G}^H \\ & \quad - \left(\kappa + \boldsymbol{\beta}^H \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}^H \boldsymbol{\beta} \right) \mathbf{I} \leq \mathbf{M}, \|\boldsymbol{\mu}\| \leq \alpha. \end{aligned} \quad (8)$$

(8)'deki kısıta Schur tümlerini uygulayarak (9)'daki kısıta ulaşırız. (9)'daki kısıta Schur tümlerini ikinci kez uygulayarak aşağıdaki ifadeye ulaşırız:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} + (\kappa/N + \boldsymbol{\beta}^H \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}^H \boldsymbol{\beta})\mathbf{I} & \mathbf{G} & \left\{(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{H})\mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}}\right\}^H \\ \mathbf{G}^H & \mathbf{R}_w^{-1} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{H})\mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0$$

Şekil 1: $N = 4$, $M = 4$, $\text{SNR} = 45$ ve $\alpha = 2.5$ için farklı $\mathbf{H}$ modellerinin MSE'lerinin sıralanması.

Yukarıdaki kısıt aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M} + (\kappa/N)\mathbf{I} & \mathbf{G} & \left\{(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{H}_0)\mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}}\right\}^H \\ \mathbf{G}^H & \mathbf{R}_w^{-1} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{H}_0)\mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ & \geq \begin{bmatrix} -(1/N)\mathbf{F}^H \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{G}\mathbf{E} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ & \quad + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{A}^H \begin{bmatrix} -(1/N)\mathbf{F} & \mathbf{0} & \mathbf{E}^H \mathbf{G}^H \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Burada, $\mathbf{A} \triangleq \boldsymbol{\mu} \otimes \mathbf{I}$, $\mathbf{E} \triangleq [\mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_p]$, ve $\mathbf{C}_i \triangleq \mathbf{H}_i \mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}}$, $i = 1, \dots, p$ şeklinde tanımlanmıştır. [1]'deki Önerme 2'nin yukarıdaki kısıta uygulanması sonucu teoremden verilen kısıta ulaşılır. $\square$

Teoremin ispatında [1]'deki Önerme 2 kullanılmıştır ve bu önerme S -prosedürünün kayıpsızlık özelliği kullanılarak uygulanmıştır [7]. S -prosedürü tek kısıtlı karesel formlar için karmaşık ve gerçel düzlemlerde kayıpsız bir yöntem olduğu için, Teorem'de belirtilen yöntem gerçel düzlemdeki sinyaller için de geçerlidir [8].

IV. SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde önerilen algoritmanın performansı sayısal örneklerle gösterilmektedir. İki örnekte de $N = 4$ ve $M = 4$ için, rastgele birer kanal kestirim matrisi $\mathbf{H}_0$ üretilmiştir ve her farklı kanal için bu kestirimin üzerine 4 ayrı yapıya sahip matrisler rastgele ağırlıklarla, ağırlıkların spektral normu $\|\boldsymbol{\mu}\| \leq \alpha$ 'dan az olacak şekilde eklenip gerçel doğrusal model oluşturulmuştur. Yapısal formlar ise şu aşağıdaki kaydırma matrisi kullanılarak oluşturulmuştur:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{M} - \mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}}(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{H})^H(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{H})\mathbf{R}_x^{\frac{1}{2}} + (\kappa/N + \beta^H\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}^H\beta)\mathbf{I} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^H & \mathbf{R}_w^{-1} \end{array} \right] \geq 0 \quad (9)$$

$\mathbf{H}_1 = \mathbf{I}$ seçilerek $\mathbf{H}_{i+1} = \mathbf{U}\mathbf{H}_i$, $i = 1, 2, 3$ matrisleri oluşturulup yapısal formlar olarak kullanılmıştır.

Gönderilen veri ve toplanır gürültü vektörleri için ilinti matrisleri $\mathbf{R}_x = \mathbf{I}$ ve $\mathbf{R}_w = c\mathbf{I}$ seçilmiştir ve c parametresi $\text{SNR} = 45$ dB olacak şekilde ayarlanmıştır. Şekillerde “DK” doğrudan $\mathbf{H}_0$ kestirimine ayarlanan sayısal MMSE yöntemi; “GP” bu bildiride önerilen göreceli performans ölçütünü eniyileştiren yöntemi ve son olarak “EKEB” en küçük-en büyük eniyileştirme algoritmasına göre en kötü durumdaki $\boldsymbol{\mu}$ ağırlıklarına göre ayarlanmış endüyük kestirim hatasına ulaşan algoritmayı simgeler.

Şekil 1 ve Şekil 2’de rasgele üretilen 10000 doğrusal $\mathbf{H}$ modeline karşılık gelen MSE değerlerini küçükten büyüğe sıralanmıştır. Bu deneylerde sırasıyla $\alpha = 2.5$ ve $\alpha = 3.5$ seçilmiştir. Birinci deneyde, en kötü (veya en büyük) MSE değerleri “DK” için 15.5058 (dB), “GP” için 5.1166 (dB) ve “EKEB” için 0 (dB) olarak görüldü. Ortalama değerler ise “DK” için 5.0573 (dB), “GP” için -0.3888 (dB) ve “EKEB” için 0 (dB) olarak gözlemlendi. İkinci deneyde ise, en kötü (veya en büyük) MSE değerleri “DK” için 17.5641 (dB), “GP” için 5.4250 (dB) ve “EKEB” için 0 (dB) olarak görüldü. Ortalama değerler ise “DK” için 6.9011 (dB), “GP” için -0.1295 (dB) ve “EKEB” için 0 (dB) olarak gözlemlendi.

Şekil 1 ve Şekil 2’de gözlemlenen sonuçlara göre en kötü durumda beklendiği gibi EKEB algoritması en iyi performansı sergilemektedir. Ancak, bu algoritmanın performansı ortalamada yeterli düzeyde değildir. Öte yandan, doğrudan kanal kestirim matrisini kullanmak ise en kötü durumda kabul edilemez sonuçlar vermektedir. Önerilen algoritma ise bu iki teknik arasında bir ödünleşim sağlayarak daha yumuşak bir geçiş performansı sergilemektedir. Ayrıca, yapılan deneylerde önerilen algoritmanın ortalama kestirim hatasını küçültebildiği de gözlemlenmiştir.

V. SONUÇLAR

Bu bildiride, sınırlı yapısal veri belirsizlikleri altında doğrusal kestirim problemi incelenmiştir. Problemin çözümü için gürbüz performanslı bir algoritma önerilmiş ve bu algoritmaya yarışmacı formülasyonla ulaşılmıştır. Bu amaçla, literatürdeki doğrudan kestirimleri kullanan veya en kötü durum eniyileştirmesi yapan yöntemler yerine, göreceli bir performans tanımı yapılarak bu performansın en kötü durumda eniyileştirmesi yapılmıştır. Bu performans tanımı ile literatürdeki yöntemlerin performansları arasında geçiş performansına ulaşan bir yöntem sunulmuştur. Ayrıca, bu algoritmanın çözümünün SDP problemi şeklinde gösterilebileceği bulunmuş ve SDP probleminin formülasyonu tam olarak verilmiştir. SDP problemleri oldukça hızlı çözülebildiği için önerilen yöntem gerçek hayat uygulamalarında rahatlıkla kullanılabilir. Son olarak, önerilen algoritmanın performansı literatürdeki alternatiflerine göre karşılaştırılmış ve sağladığı performans artışı gözlemlenmiştir.

Şekil 2: $N = 4$, $M = 4$, $\text{SNR} = 45$ ve $\alpha = 3.5$ için farklı $\mathbf{H}$ modellerinin MSE’lerinin sıralanması.

KAYNAKÇA

- [1] Y. C. Eldar and N. Merhav, “A competitive minimax approach to robust estimation of random parameters,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, no. 7, pp. 1931–1946, 2004.
- [2] S. S. Kozat and A. T. Erdogan, “Competitive linear estimation under model uncertainties,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 58, no. 4, pp. 2388–2393, April 2010.
- [3] L. E. Ghaoui and H. Lebret, “Robust solutions to least-squares problems with uncertain data,” *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 18, no. 4, pp. 1035–1064, 1997.
- [4] A. T. Erdogan, B. Hassibi, and T. Kailath, “MIMO decision feedback equalization from an H^∞ perspective,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 52, no. 3, pp. 734–745, 2004.
- [5] A. H. Sayed and S. Chandrasekaran, “Parameter estimation with multiple sources and levels of uncertainties,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 48, no. 3, pp. 680–692, 2000.
- [6] S. Chandrasekaran, G. H. Golub, M. Gu, and A. H. Sayed, “Parameter estimation in the presence of bounded modeling errors,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 4, no. 7, pp. 195–197, 1997.
- [7] A. Fradkov and V. Yakubovich, “The S-procedure and duality relations in nonconvex problems of quadratic programming,” *Vestnik Leningradskogo Universiteta, Seriya Matematika*, no. 1, pp. 101–109, 1973.
- [8] Y. Huang and S. Zhang, “Complex matrix decomposition and quadratic programming,” *Mathematics of Operations Research*, vol. 32, no. 3, pp. 758–768, 2007.